משוואת החום ההומוגנית ותנאי שפה הומוגניים

a. $\underline{u_t = \alpha^2 u_{xx}}$, $(\alpha \neq 0, t > 0, 0 < x < l)$, $u(x,0) = f(x)$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$	$\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$	$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\alpha\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$
$u_x(0,t) = u(l,t) = 0$	$\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right\}$	$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\left(\alpha\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$
$u(0,t) = u_x(l,t) = 0$	$\left\{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right\}$	$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\left(\alpha\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$	$\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{l}\right\}$	$u(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\alpha\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi x}{l}$

b. $u_t = \alpha^2 u_{xx} + bu \Rightarrow u(x,t) = v(x,t)e^{bt} \Rightarrow v_t = \alpha^2 v_{xx}$

<u>דוגמה 1</u> :

$$u_t = 16u_{xx}\,,\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0\,,\ t > 0,\ u(x,0) = 4\cos\frac{3x}{2} - 5\cos\frac{7x}{2}\,,\ 0 < x < \pi$$

<u>פתרון</u>

$$\left.\begin{array}{l} u_t = 16u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-4(2n+1)^2 t} \cos\frac{(2n+1)x}{2}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\frac{(2n+1)x}{2} = 4\cos\frac{3x}{2} - 5\cos\frac{7x}{2} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 4 \\ b_3 = -5 \\ b_n = 0 \quad , \quad n \neq 1, n \neq 3 \end{cases}$$

$$u(x,t) = 4e^{-36t}\cos\frac{3x}{2} - 5e^{-196t}\cos\frac{7x}{2}$$

.

1 . קצה אחד של מוט $(x=0)$ מבודד (אין מעבר חום) , בקצה שני $(x=l)$ טמפרטורה $u=0$.
טמפרטורה התחלתית בכל מוט שווה ל u_0 . מצא את $u(x,t)$ עבור $t > 0$.
א) תנסח את בעיה שפת התחלה
ב) פתור אותה על-ידי הפרדת משתנים

2 . קצוות של המוט באורך l מחזיקים ב טמפרטורה שווה 0^0 . טמפרטורה התחלתית של המוט שווה
ל $u(x,0) = 3\sin\frac{\pi x}{l} - 2\sin\frac{3\pi x}{l}$. מצא את $u(x,t)$ עבור $t > 0$.

מצא פתרון פרטי עבור משוואת החום הנתונה המקיים את התנאים המצורפים :

3) $u_t = u_{xx} - 3u$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t > 0$, $u(x,0) = (x - x^2)e^{-3t}$, $0 < x < 1$

4) $u_t = 4u_{xx}$, $u(0,t) = u(2,t) = 0$, $t > 0$, $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

5) $u_t = u_{xx}$, $u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t > 0$, $u(x,0) = 3\cos\frac{5x}{2}$, $0 \le x \le \pi$

6) $u_t = 4u_{xx}$, $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $t > 0$, $u(x,0) = \cos^2 x$, $0 < x < \pi$

7) $u_t = u_{xx} - u$, $u(0,t) = u_x(1,t) = 0$, $t > 0$, $u(x,0) = x$, $0 < x < 1$

<u>תשובות</u> :

1) $u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2l}\right)^2 t} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$

2) $u(x,t) = 3e^{-(\pi\alpha/l)^2 t} \sin\frac{\pi x}{l} - 2e^{-(3\pi\alpha/l)^2 t} \sin\frac{3\pi x}{l}$

3) $u(x,t) = \frac{4}{\pi^3} e^{-3t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x = \frac{8}{\pi^3} e^{-3t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x$

4) $u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2} e^{-n^2\pi^2 t} \sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

5) $u(x,t) = 3e^{-\frac{25}{4}t} \cos\frac{5x}{2}$

6) $u(x,t) = 0.5 + 0.5e^{-16t} \cos 2x$