אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 29.02.08
מרצים: ד"ר נ. צ'רניבסקיה, ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **משוואות דיפרנציאליות רגילות**
מס' הקורס 0201.1.9461
מועד ב סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: מותר להביא 2 דפי נוסחאות

יש לפתור 5 שאלות הבאות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה.
לכל שאלה משקל שווה (20 נקודות).

בהצלחה!

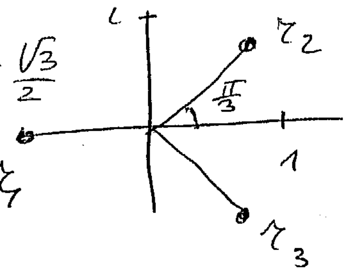
שאלה מס' 1. פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$y^{(6)} + 2y^{(3)} + y = \cos x + e^{\frac{x}{2}}$$

$$r^6 + 2r^3 + 1 = 0 \qquad (r^3+1)^2 = 0$$

כל השורשים מריבוי 2

$$r_1 = -1 \qquad r_{2,3} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



פתרון כללי של משוואה הומוגנית.

$$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{\frac{x}{2}} \mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_4 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$
$$+ C_5 x e^{\frac{x}{2}} \mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_6 x e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

פתרון כללי של משוואה א-הומוגנית:

$$y = \tilde{y} + y_1 + y_2$$

$$y_1 = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$$

$$y_2 = C e^{\frac{x}{2}}$$

מחשבים מקדמים ע"י שיטה של השוואת מקדמים.

$$y_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x$$

$$y_2 = \frac{64}{81} e^{\frac{x}{2}}$$

שאלה מס' 2א. (10 נק') פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$\underbrace{(2x\ln y+1)}_{M}dx+\underbrace{\left(\frac{x^2}{y}-\frac{1}{y}\right)}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2x}{y}\overset{!}{=}\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2x}{y}$$

משוואה מדוייקת

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=\underbrace{\frac{x^2}{y}-\frac{1}{y}}_{N}\qquad \phi=x^2\ln y-\ln y+h(x)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=2x\ln y+h'=\underbrace{2x\ln y+1}_{M}$$

$$h'=1\qquad h=x$$

$$\phi=\boxed{x^2\ln y-\ln y+x=c}$$

שאלה מס' 2ב. **(10 נק')** פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$$

1) $y = 0$ – פתרון.

2) $x = 0$ גם פתרון: $xdy - (2x^2\sqrt{y} - 4y)dx = 0$

3) משוואת ברנולי:

$$xy'y^{-1/2} - 4y^{1/2} = 2x^2$$

$$z = y^{1/2} \qquad z' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$$

$$2xz' - 4z = 2x^2$$

$$z' - \frac{2}{x}z = x$$

$$z = C(x)e^{\int \frac{2}{x}dx} = C(x)x^2$$

$$C'(x)x^2 = x$$

$$C'(x) = \frac{1}{x}$$

$$C = \ln|x| + C_0$$

$$\boxed{y^{1/2} = (\ln|x| + C_0)x^2}$$

שאלה מס' 3. פתור/פתרי את הבעית תנאי התחלה הבאה

$$2y'' = e^y, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$p(y) = y' \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$2p\frac{dp}{dy} = e^y \longrightarrow p^2 = e^y + C_1$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{e^y + C_1}$$

$$x = 0;\quad y = 0,\ y' = 1 \implies \underline{C_1 = 0,\ \text{"}+\text{"}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{e^y} = e^{y/2}$$

$$e^{-\frac{y}{2}}\,dy = dx$$

$$-2e^{-y/2} = x + C_2$$

$$x = 0:\quad y = 0 \implies C_2 = -2$$

$$\boxed{-2e^{-\frac{y}{2}} = x - 2}$$

שאלה מס' 4. פתור/פתרי מערכת משוואות דיפרנציאליות באמצעות שיטת הווריאציה למערכות

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0\ , \quad \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 = 0 : \quad -4\alpha - 2\beta = 0 \longrightarrow \quad \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 : \quad -3\alpha - 2\beta = 0 \longrightarrow \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2(t)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

וריאציה למערכת משוואות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2e^{-t} \\ -2 & -3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\frac{1}{e^t - 1}$$

$$\Rightarrow \quad c_1' = 0 \longrightarrow \quad c_1 = c_{10}$$

$$c_2' = \frac{e^t}{e^t - 1} \longrightarrow \quad c_2 = \ln|e^t - 1| + c_{20}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_{10}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\left(e^{-t}\ln|e^t - 1| + c_{20}e^{-t}\right)$$

שאלה מס' 5. השתמש/השתמשי בהתמרת לפלס כדי לפתור את הבעיה הבאה

$$y'' - 4y' + 4y = f(t) + \delta(t-3)$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=2, \quad f(t)=\begin{cases} 0 & 0 \le t < \pi \\ \cos t & \pi \le t \end{cases}$$

$\mathcal{L}[y'] = pF(p) - y(0) = pF(p)$

$\mathcal{L}[y''] = p^2F(p) - p\,y(0) - y'(0) = p^2F(p) - 2$

$f(t) = u_\pi(t)\cos t \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = -e^{-\pi p}\frac{p}{p^2+1}$

$= u_\pi(t)\cos(t-\pi+\pi) =$

$= -u_\pi(t)\cos(t-\pi)$

$p^2F(p) - 2 - 4pF(p) + 4F(p) = -e^{-\pi p}\frac{p}{p^2+1} + e^{-3p}$

$F(p) = -e^{-\pi p}\frac{p}{(p-2)^2(p^2+1)} + \frac{e^{-3p}}{(p-2)^2} + \frac{2}{(p-2)^2}$

$\frac{A}{p+2} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1} = \frac{A(p-2)(p^2+1) + B(p^2+1) + (Cp+D)(p-2)^2}{(p-2)^2(p^2+1)}$

$A + C = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -C$

$-2A + B - 4C + D = 0$

$A + 4C - 4D = 1$

$-2A + B + 4D = 0$

$$\begin{cases} B - 2C + D = 0 & (1) \\ 3C - 4D = 1 & (2) \\ B + 2C + 4D = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(3)\quad 2B + 5D = 0$

$(3)-(1)\quad 4C + 3D = 0$

$C = -\frac{3}{4}D \Rightarrow (2)$

$D = -\frac{4}{25};\ C = \frac{3}{25};\ B = \frac{2}{5}$

$A = -\frac{3}{25}$

$\frac{p}{(p-2)^2(p^2+1)} = -\frac{3}{25}\frac{1}{p-2} + \frac{2}{5}\frac{1}{(p-2)^2} + \frac{3}{25}\frac{p}{p^2+1} - \frac{4}{25}\frac{1}{p^2+1}$

$y(t) = -u_\pi(t)\left[-\frac{3}{25}e^{+2(t-\pi)} + \frac{2}{5}e^{+2(t-\pi)}(t-\pi) + \frac{3}{25}\cos(t-\pi) - \frac{4}{25}\sin(t-\pi)\right]$

$+ u_3(t)\,e^{+2(t-3)}(t-3) + 2e^{+2t}\,t$

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n; $n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
9. $e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}$, $n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$