אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 29.01.07
מרצים: ד"ר ג. צ'רניבסקיה, ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: <u>משוואות דיפרנציאליות רגילות</u>
מס' הקורס 0201.1.9461
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: מותר להביא 2 דפי נוסחאות

**יש לפתור 5 שאלות הבאות בדפים המיועדים לכך בלבד.**
**לטיוטה השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה.**
**לכל שאלה משקל שווה (20 נקודות).**

# בהצלחה!

**שאלה מס' 1.** פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\left(2x^2 y \ln y - x\right)\frac{dy}{dx} = y$$

($\ln y$ בגלל) פתרון לא $y=0$

$$y\frac{dx}{dy} = 2x^2 y \ln y - x$$ משוואת ברנולי

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x^{-1} = 2\ln y$$

$$z(y) = x^{-1} \qquad \frac{dz}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy}$$

$$-\frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = 2\ln y$$

$$\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z = -2\ln y$$

$$z = c(y)e^{\int\frac{dy}{y}} = c(y)y$$

$$c'(y)y = -2\ln y$$

$$c'(y) = -\frac{2\ln y}{y} \qquad c(y) = -2\int\frac{\ln y}{y}dy =$$

$$= -\ln^2 y + C_0$$

$$\underline{\frac{1}{x} = y\left(C_0 - \ln^2 y\right)}$$

**שאלה מס' 2.** פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$yy'' = y'(y'+1)$$

$$p = y' \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy} = p(p+1)$$

$p = 0 \longrightarrow \underline{y = C}$ פתרון

$p + 1 = 0 \longrightarrow \underline{y = -x + C}$ פתרון

$$\frac{dp}{p+1} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|p+1| = \ln|y| + \ln|C_0|$$

$$p + 1 = C_0 y \qquad \frac{dy}{dx} - C_0 y = -1$$

$$y = C_1 e^{C_0 x} + \frac{1}{C_0}$$

$$y = -x + c$$

$$y = 0$$

פתרונות אחרים
$y = c$
מקבלים מנוסחה
ראשונה

**שאלה מס' 3.** פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = x^2 e^{2x}$$

כאשר נתון פתרון אחד, $y_1 = e^x$, של משוואה ההומוגנית $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

$$\tilde{y} = C_1 e^x \int \frac{e^{\int \frac{2x+1}{x}dx}}{e^{2x}}dx + C_2 e^x =$$

$$= C_1 e^x \int \frac{e^{2x}|x|}{e^{2x}}dx + C_2 e^x = \underline{C_1 \frac{x^2}{2} e^x + C_2 e^x}$$

פתרון של משוואה הומוגנית

$$y = C_1(x)\, x^2 e^x + C_2(x)\, e^x \quad -$$

פתרון של משוואה אי-הומוגנית (שיטה של לגראנז'ה)

$$\begin{cases} C_1' x^2 e^x + C_2' e^x = 0 \\ C_1'(2x+x^2)e^x + C_2' e^x = \frac{x^2 e^{2x}}{x} \end{cases}$$

$$C_1' 2x e^x = x e^{2x}. \qquad C_1' = \frac{e^x}{2}$$

$$C_1(x) = \frac{e^x}{2} + C_{10}$$

$$C_2' = -C_1' x^2 = -\frac{e^x}{2} x^2$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\int e^x x^2 dx = e^x\left(-1 + x - \frac{x^2}{2}\right) + C_{20}$$

$$\underline{y = e^{2x} \frac{x^2}{2} + C_{10} x^2 e^x + e^{2x}\left(-1 + x - \frac{x^2}{2}\right) + C_{20} e^x}$$

**שאלה מס' 4.** פתור/פתרי את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x' = -9x - y + te^t \\ y' = 20x - y \end{cases}$$

$$y'' = 20x' - y' = 20(-9x - y + te^t) - y'$$

$$\begin{cases} y'' = -y' - 20y - 180x + 20te^t \\ 20x = y' + y \end{cases}$$

$$y'' = -y' - 20y - 9(y' + y) + 20te^t$$

$$y'' + 10y' + 29y = 20te^t$$

$$r^2 + 10r + 29 = 0 \qquad r_{1,2} = -5 \pm 2i$$

$$y_h = e^{-5t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

$$\begin{array}{r|l} 29 & y_p = (At + B)e^t \\ 10 & y_p' = (At + B + A)e^t \\ 1 & y_p'' = (At + B + 2A)e^t \end{array}$$

$$\begin{cases} 29A + 10A + A = 20 \\ 29B + 10A + 10B + B + 2A = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 40A = 20 \\ 40B + 12A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \ B = -\frac{3}{20}$$

$$y = e^{-5t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^t\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{20}\right)$$

$$20x = y' + y = e^{-5t}(-5C_1 \cos 2t - 5C_2 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - 2C_1 \sin 2t) + e^t\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{20} + \frac{1}{2}\right)$$

$$+ e^{-5t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^t\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{20}\right)$$

$$x = \frac{e^{-5t}}{10}\left((C_2 - 2C_1)\cos 2t - (2C_2 + C_1)\sin 2t\right) + \frac{e^t}{20}(t + 0.2)$$

**שאלה מס' 5.** השתמש/השתמשי בהתמרת לפלס כדי לפתור את הבעיה הבאה:

$$y'' + 4y = g(t) + \delta(t-2),$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

$$g(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le \pi \\ t & \pi \le t \end{cases}$$

$$g(t) = \sin t\,[1 - H(t-\pi)] + t\,H(t-\pi) = \sin t + H(t-\pi)[t - \sin t]$$

$$\varphi(t-\pi) = t - \sin t \implies \varphi(t) = t + \pi - \sin(t+\pi) =$$

$$= \underline{t + \pi + \sin t}$$

$$L[g] = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s} L[\varphi]$$

$$(s^2+4)Y - s = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2+1}\right] + e^{-2s}$$

$$Y = \underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{I} + \underbrace{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}}_{II} + \underbrace{e^{-\pi s}\left[\frac{1}{s^2(s^2+4)} + \frac{\pi}{s(s^2+4)} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]}_{III} + \underbrace{\frac{e^{-2s}}{s^2+4}}_{IV}$$

$$y(t) = L^{-1}[I] + L^{-1}[II] + L^{-1}[III] + L^{-1}[IV]$$

$$L^{-1}[I] = \cos 2t \qquad L^{-1}[IV] = H(t-2)\,\tfrac{1}{2}\sin 2(t-2)$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) \implies L^{-1}[II] = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right).$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)\frac{1}{4}$$

$$L^{-1}[III] = H(t-\pi)\Big[\frac{1}{4}\left\{t - \pi - \frac{1}{2}\sin(t-\pi)\right\} + \frac{\pi}{4}\left\{1 - \cos 2(t-\pi)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{3}\left\{\sin(t-\pi) - \frac{1}{2}\sin 2(t-\pi)\right\}\Big]$$

**TABLE 6.2.1** Elementary Laplace Transforms

| $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ |
|---|---|
| 1. $1$ | $\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$ |
| 2. $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$ |
| 3. $t^n$; $\quad n =$ positive integer | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$ |
| 4. $t^p, \ p > -1$ | $\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$ |
| 5. $\sin at$ | $\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$ |
| 6. $\cos at$ | $\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$ |
| 7. $\sinh at$ | $\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$ |
| 8. $\cosh at$ | $\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$ |
| 9. $e^{at}\sin bt$ | $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$ |
| 10. $e^{at}\cos bt$ | $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$ |
| 11. $t^n e^{at}$, $n =$ positive integer | $\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$ |
| 12. $u_c(t)$ | $\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$ |
| 13. $u_c(t)f(t-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ |
| 14. $e^{ct}f(t)$ | $F(s-c)$ |
| 15. $f(ct)$ | $\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$ |
| 16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ | $F(s)G(s)$ |
| 17. $\delta(t-c)$ | $e^{-cs}$ |
| 18. $f^{(n)}(t)$ | $s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ |
| 19. $(-t)^n f(t)$ | $F^{(n)}(s)$ |