אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 26.01.07
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **מבוא למשוואות דיפרנציאליות ב'**
מס' הקורס 0201.1.9171
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: מותר להביא 2 דפי נוסחאות

יש לענות על 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-20 נקודות).

שאלה מס' 1.
פתור/ פתורי את המשוואה הבאה:

$$y''' + y = 2e^{-x} + \sin(2x)$$

שאלה מס' 2.
פתור/ פתורי את המשוואה הבאה:

$$x^2 y'' - 2y = \cos(\ln x) \qquad (x > 0)$$

שאלה מס' 3. מצא/י פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

שאלה מס' 4.
מצא/י פתרון כללי של משוואה

$$(2x-3)y'' - xy' + y = 0$$

כטור חזקות סביב $x_0 = 0$.
צריך לחשב לפחות חמשת המקדמים הראשונים ולהעריך את הרדיוס ההתכנסות של הטור.

שאלה מס' 5. פתור/ פתורי את הבעיה הבאה בעזרת התמרת לפלס:

$$y'' - y = g(t) + \delta(t-1),$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$
$$g(t) = \begin{cases} \cos(t) & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \pi \le t \end{cases}$$

בהצלחה!

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n; $n =$ positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. t^p, $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
9. $e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}$, $n =$ positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

$$y''' + y = 2e^{-x} + \sin 2x$$

1

$$y''' + y = 0$$

$$\lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{-1}$$

$$a + ib = -1 \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$k = \overline{0, n-1}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} = \arctan 0 = \pi$$

$$\lambda_0 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{3}\right)$$

$$\lambda_1 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{3}\right)$$

$$\lambda_2 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{3}\right)$$

$$\lambda_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_1 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = -1$$

$$\lambda_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_0 = C_1 e^{-1 \cdot x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$f_1(x) = 2e^{-x}$$

$$y_1 = axe^{-x}$$

$$y_1' = a(e^{-x} + x\cdot(-e^{-x})) = ae^{-x} - axe^{-x}$$

$$y_1'' = -ae^{-x} - a(e^{-x} + x(-e^{-x})) = -2ae^{-x} + axe^{-x}$$

$$y_1''' = 2ae^{-x} + a(e^{-x} + x\cdot(-e^{-x})) = 3ae^{-x} - axe^{-x}$$

$$3ae^{-x} - \cancel{axe^{-x}} + \cancel{axe^{-x}} = 2e^{-x}$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$y_1 = \frac{2}{3}xe^{-x}$$

$$f_2(x) = \sin 2x$$

$$y_2 = a\sin 2x + b\cos 2x$$

$$y_2' = 2a\cos 2x - 2b\sin 2x$$

$$y_2'' = -4a\sin 2x - 4b\cos 2x$$

$$y_2''' = -8a\cos 2x + 8b\sin 2x$$

$$-8a\cos 2x + 8b\sin 2x + a\sin 2x + b\cos 2x = \sin 2x$$

$$\begin{array}{l} \cos 2x: \\ \sin 2x: \end{array} \begin{cases} -8a + b = 0 \\ 8b + a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8a \\ 64a + a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{65} \\ b = \frac{8}{65} \end{array}$$

$$y_2 = \frac{1}{65}\sin 2x + \frac{8}{65}\cos 2x$$

$$y = c_1 e^{-x} + \left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{\frac{x}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{3} x e^{-x} + \frac{1}{65}\sin 2x + \frac{8}{65}\cos 2x$$

$$x^2 y'' - 2y = \cos(\ln x) \qquad (x > 0)$$ 2

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$y_0 = C_1 \cdot x^2 + C_2 x^{-1}$$

$$y = C_1(x) x^2 + C_2(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) x^2 + C_2'(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \\ C_1'(x) \cdot 2x + C_2'(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\cos(\ln x)}{x^2} \end{cases}$$

$$C_1'(x) x^2 + C_2'(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$-C_2'(x) \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 2x + C_2'(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\cos(\ln x)}{x^2}$$

$$C_2'(x) = -\frac{x^2 \cos(\ln x)}{3 x^2}$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos(\ln x)}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{5x^2} \cos(\ln x) + \frac{1}{5x^2} \sin(\ln x) + \tilde{C}_1\right) x^2 +$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right) + \tilde{C}_2\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$c_1(x) = \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{\cos(\ln x)}{x^3}\,dx}_{I} = \begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ du = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ dv = \frac{dx}{x^3} \qquad v = -\frac{1}{2x^2} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2x^2}\cdot\cos(\ln x) + \int \frac{1}{2x^2}\cdot\left(-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right)dx\right.$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2x^2}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\int \frac{\sin(\ln x)}{x^3}\,dx\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = \sin(\ln x) & du = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ dv = \frac{dx}{x^3} & v = -\frac{1}{2x^2} \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2x^2}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2}\sin(\ln x) + \int \frac{\cos(\ln x)}{2x^3}\,dx\right.\right.$$

$$= -\frac{1}{6x^2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2\cdot 6x^2}\sin(\ln x) - \frac{1}{6\cdot 2}\underbrace{\int \frac{\cos(\ln x)}{x^3}\,dx}_{I}$$

$$\frac{1}{3}I = -\frac{1}{6x^2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2\cdot 6x^2}\sin(\ln x) - \frac{1}{2\cdot 6}I$$

$$\frac{5}{12}I = -\frac{1}{6x^2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2\cdot 6x^2}\sin(\ln x) \qquad \Big|\times\frac{12}{5}$$

$$I = -\frac{2}{5x^2}\cos(\ln x) + \frac{1}{5x^2}\sin(\ln x) + \tilde{c}_1$$

$$c_1(x) = \frac{1}{3}I + \tilde{c}_1$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{3}\underbrace{\int \cos(\ln x)\,dx}_{I} = \left[\begin{array}{ll} u = \cos(\ln x) & \\ du = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx & \\ dV = dx & V = x \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = \sin(\ln x) & du = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ dV = dx & V = x \end{array}\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(\ln x) - \frac{1}{3}x\sin(\ln x) + \frac{1}{3}\underbrace{\int \cos(\ln x)\,dx}_{I}$$

$$-\frac{1}{3}I = -\frac{1}{3}x\cos(\ln x) - \frac{1}{3}x\sin(\ln x) + \frac{1}{3}I$$

$$-\frac{2}{3}I = -\frac{1}{3}x\cos(\ln x) - \frac{1}{3}x\sin(\ln x) \qquad \Big|\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$I = \frac{x}{2}\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + \tilde{C}_2$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{3}I + \tilde{C}_2$$

$$\begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{cases} \qquad x = \frac{y'+y}{2}$$

$$y'' = 2\left(x - y + \frac{1}{\cos t}\right) - y' = 2\,\frac{y'+y}{2} - 2y + \frac{2}{\cos t} - y'$$

$$y'' = \cancel{y'} + y - 2y + \frac{2}{\cos t} - \cancel{y'}.$$

$$y'' + y = \frac{2}{\cos t}$$

$$y = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$$

$$C_1'\cos t + C_2'\sin t = 0$$

$$-C_1'\sin t + C_2'\cos t = \frac{2}{\cos t}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \frac{2}{\cos t} & \cos t \end{vmatrix} = -\frac{2\sin t}{\cos t}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \frac{2}{\cos t} \end{vmatrix} = 2$$

$$C_1' = -\frac{2\sin t}{\cos t} \qquad C_1 = -2\int \frac{\sin t\,dt}{\cos t} = 2\int \frac{d\cos t}{\cos t}$$

$$C_1 = 2\ln|\cos t| + C_{10} = \ln(\cos^2 t) + C_{10}$$

$$C_2' = 2 \qquad C_2 = 2t + C_{20}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= (\ln\cos^2 t + C_{10})\cos t + (2t + C_{20})\sin t \\ x &= \frac{y'+y}{2} \end{aligned}}$$

(4)

$$(2x-3)y''-xy'+y=0 \quad , \quad x_0=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad 2x_1-3=0 \rightarrow x_1=\frac{3}{2}$$

רדיוס התכנסות:

$$r \geq dist(x_0, x_1)=\frac{3}{2}$$ (1

(2

$$2\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1}-3\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n+\sum_{n=6}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)nx^n-3\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$n=0)$ $\quad -6a_2+a_0=0 \implies a_2=\frac{a_0}{6}$

$n\geq 1)$ $\quad 2(n+1)na_{n+1}-3(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)a_n=0$

$$\implies a_{n+2}=\frac{2(n+1)n\,a_{n+1}-(n-1)a_n}{3(n+2)(n+1)}$$

נוסחת הנסיגה מאפשרת חישוב כל המקדמים הגבוהים:

$$a_3=\frac{a_0}{27} \quad , \quad a_4=\frac{5}{648}a_0 \, , \ldots$$

אם פתרון כללי הוא:

$$y=a_0\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{27}+\frac{5}{648}x^4+\ldots\right)+a_1\cdot x$$

$$y'' - y = \underbrace{\begin{cases} \cos t & 0 \le t < \pi \\ 0 & \pi \le t \end{cases}}_{f(t)} + \delta(t-1)$$

5

$y(0) = 1, \; y'(0) = -1$

$$s^2 Y - s + 1 - Y = \mathcal{L}[f] + e^{-s}$$

$$f = [1 - H(t-\pi)]\cos t = \cos t - H(t-\pi)\cos t$$

$$\cos t = g(t-\pi) \rightarrow g(t) = \cos(t+\pi) = -\cos t$$

$$\mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$Y = \underbrace{\frac{s-1}{s^2-1}}_{I} + \underbrace{\frac{s}{(s^2+1)(s^2-1)}}_{II} + \underbrace{e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)(s^2-1)}}_{III} + \underbrace{\frac{e^{-s}}{s^2-1}}_{IV}$$

$$I = \frac{1}{s+1} \qquad \mathcal{L}^{-1}(I) = e^{-t}$$

$$II = \frac{s}{(s^2+1)(s^2-1)} = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2-1} - \frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$\frac{s}{s^2-1} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} = \frac{(A+B)s + (A-B)}{s^2-1} \qquad \begin{aligned} A+B &= 1 \\ A-B &= 0 \end{aligned}$$

$$A = B = \frac{1}{2}$$

$$II = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}(II) = \frac{1}{4}\left(e^{t} + e^{-t}\right) - \frac{1}{2}\cos t$$

$$III = e^{-\pi s} \cdot II \rightarrow \mathcal{L}^{-1}(III) = H(t-\pi)\left[\frac{1}{4}\left(e^{t-\pi} + e^{-t+\pi}\right) - \frac{1}{2}\cos(t-\pi)\right]$$

$$IV \quad \mathcal{L}^{-1}(IV) = \qquad \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}H(t-1)\left[e^{t-1} - e^{-(t-1)}\right]$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[I + II + III + IV\right]$$