אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 25.01.08
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **מבוא למשוואות דיפרנציאליות ב'**
מס' הקורס 0201.1.9171
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר:
מותר להביא 2 דפי נוסחאות ומחשבון עם צג קטן

יש לענות על 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-20 נקודות).

שאלה מס' 1.
מצא/י פתרון כללי של המשוואה הבאה

$$xyy' = \frac{x^2}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)} + y^2$$

שאלה מס' 2.
פתור/ פתורי את המשוואה הבאה

$$(2x-1)^2 y'' - 3(2x-1)y' + 4y = 4$$

עם תנאי ההתחלה $y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$.

שאלה מס' 3. מצא/י פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 3e^{4t} \\ y' = 2y + x + 2e^{t} \end{cases}$$

שאלה מס' 4.
נתונה המשוואה הבאה:

$$xy'' - y' + (1-x)y = 0$$

א) (10 נק') אחד מהפתרונות שלה הוא $y_1 = e^x$. מצא/י פתרון כללי.

ב) (10 נק') פתור/ פתורי את אותה המשוואה באמצעות טור חזקות סביב $x_0 = 1$.(צריך למצוא נוסחת נסיגה למקדמי הטור ולהעריך את הרדיוס ההתכנסות.)

שאלה מס' 5. פתור/ פתורי את הבעיה הבאה בעזרת התמרת לפלס:

$$y'' - 6y' + 9y = g(t) + \delta(t-2),$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$
$$g(t) = \begin{cases} e^t & 1 \le t \le 2 \\ 0 & t \notin [1,2] \end{cases}$$

בהצלחה!

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n; $n =$ positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. t^p, $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
9. $e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}$, $n =$ positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

$$xyy' = \frac{x^2}{\cos\frac{y}{x}} + y^2$$

$$y = v(x)x$$

$$y' = v + xv'$$

$$x \cdot xv \cdot (v + xv') = \frac{x^2}{\cos v} + x^2 v^2$$

$$v^2 + xvv' = \frac{1}{\cos v} + v^2$$

$$xvv' = \frac{1}{\cos v}$$

$$v \cos v \, dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int v \cos v \, dv = v \sin v - \int \sin v = v \cos v + \cos v$$

$$v \cos v + \cos v = \ln|cx| \qquad c \neq 0$$

$$\boxed{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|cx|, \quad c \neq 0}$$

$$(2x-1)^2 y'' - 3(2x-1)y' + 4y = 4$$
$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$$

<u>משוואת אוילר מוכללת.</u> פותרים משוואה הומוגנית:

$$y = (2x-1)^r$$

$$y' = 2r(2x-1)^{r-1} \qquad y'' = 4r(r-1)(2x-1)^{r-2}$$

$$4r(r-1) - 6r + 4 = 0$$

$$4r^2 - 10r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, \quad r_2 = \frac{1}{2}$$

בתחום $x > \frac{1}{2}$ מקבלים:

$$\tilde{y} = C_1(2x-1)^2 + C_2\sqrt{|2x-1|}$$

פתרון פרט של משוואה א-הומוגנית: $\hat{y} = 1$.

את פתרון כללי של מ. א-הומוגנית הוא

$$y = C_1(2x-1)^2 + C_2\sqrt{|2x-1|} + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 + 1 = 0 \\ y'(1) = 2 \rightarrow 4C_1 + C_2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = -2 \end{array}$$

$$\boxed{y = (2x-1)^2 - 2\sqrt{2x-1} + 1}$$

הערה: מפתרון הפרט $\hat{y} = 1$ קל לראות.
נמצא לתשומת לב שגם הוא אינטגרלי.

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 3e^{4t} \\ y' = 2y + x + 2e^{t} \end{cases}$$

$$x'' = 2x' + (2y + x + 2e^{t}) - 12e^{4t}$$

$$\boxed{y = x' - 2x + 3e^{4t}}$$

$$x'' = 2x' + \underbrace{2x' - 4x + 6e^{4t}}_{2y} + x + 2e^{t} - 12e^{4t}$$

$$x'' - 4x' + 3x = 2e^{t} - 6e^{4t}$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 3$$

$$\boxed{x = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} + \hat{x}}$$

$$\boxed{\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2}$$

$$\hat{x}_1 = Ate^{t} \qquad \hat{x}_1' = A(t+1)e^{t} \qquad \hat{x}_1'' = A(t+2)e^{t}$$

$$A[t+2]e^{t} - 4A[t+1]e^{t} + 3Ate^{t} = 2e^{t}$$

$$-2Ae^{t} = 2e^{t} \qquad A = -1$$

$$\boxed{\hat{x}_1 = -te^{t}}$$

$$\hat{x}_2 = Be^{4t}$$

$$(16 - 16 + 3)B = -6 \qquad B = -2$$

תשובה:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} - te^{t} - 2e^{4t} \\ y &= x' - 2x + 3e^{4t} \end{aligned}}$$

4.

א)

$$xy'' - y' + (1-x)y = 0$$

$$y_1 = e^x$$

$$y = C_1 e^x \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x}}}{e^{2x}} dx + C_2 e^x =$$

$$= C_1 e^x \int x e^{-2x} dx + C_2 e^x$$

$$\int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int x\, de^{-2x} = -\frac{1}{2}\left[x e^{-2x} - \int e^{-2x} dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

$$y = C_1\left(-\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x}\right) e^x + C_2 e^x =$$

$$= -C_1\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) e^{-x} + C_2 e^x = C_1 (1+2x) e^{-x} + C_2 e^x$$

ב) $\boxed{y = \sum a_n (x-1)^n}$

$x_0 = 1 \qquad t = x-1 \qquad x = t+1$

$$(t+1)y'' - y' - ty = 0 \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$ty'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1) t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n t^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n \qquad ty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n$$

סה"כ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) t^n -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} n=0: & 2a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} a_1 \\ n \geq 1: & a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1} - (n+1)(n-1) a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} \end{array}}$$

נוסחת נס"ב

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1-x}{x} y = 0 \Rightarrow r \geq dist(x_0, 0) = 1$$

רדיוס ההתכנסות של כל פתרון הוא 1 לפחות

$$y'' - 6y' + 9y = \delta(t-2) + \begin{cases} e^{t} & t \in [1,2] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(s^2 - 6s + 9)Y - 1 = e^{-2s} + F(s)$$

$$f(t) = [u_1(t) - u_2(t)]e^{t} = u_1(t)e^{t-1} \cdot e - u_2(t)e^{t-2} \cdot e^2$$

$$F(s) = e^{-s} \cdot \frac{e}{s-1} - e^{-2s}\frac{e^2}{s-1}$$

$$Y = \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-3)^2} + e \cdot e^{-s}\frac{1}{(s-1)(s-3)^2} - e^2 \cdot e^{-2s}\frac{1}{(s-1)(s-3)^2}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-3)^2} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2} + \frac{C}{s-1}$$

$$A(s-1)(s-3) + B(s-1) + C(s-3)^2 = 1$$

$s = 1$: $\quad 4C = 1 \quad C = \frac{1}{4}$

$s = 3$ $\quad +2B = 1 \quad B = \frac{1}{2}$

$s = 2$ $\quad -A + B + C = 1 \quad A = -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{(s-1)(s-3)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{s-3} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-3)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{s-1} = \mathcal{L}[\varphi(t)]$$

$$\boxed{\varphi(t) = -\frac{1}{4}e^{+3t} + \frac{1}{2}te^{+3t} + \frac{1}{4}e^{t}}$$

$$\boxed{y(t) = te^{3t} + u_2(t)(t-2)e^{3(t-2)} + e \cdot u_1(t)\varphi(t-1) - e^2 u_2(t)\varphi(t-2)}$$