

משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

משוואות ניתנות להורדת סדר

$$y^{(k-1)} = \int f(x) dx + C_1 \Leftrightarrow y^{(k)} = f(x) \quad k=1,2,\dots \quad \text{I.}$$

דוגמה פתור : $y'' = \cos^2 x$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$ פתרון

$$y'' = \cos^2 x \Rightarrow y' = \int \cos^2 x dx + C_1$$

$$\{y' = 0.5x + 0.25 \sin 2x + C_1, \quad y'(0) = 1\} \Rightarrow 1 = 0.5 \cdot 0 + 0.25 \sin 0 + C_1 \Rightarrow$$

$$C_1 = 1 \Rightarrow y' = 0.5x + 0.25 \sin 2x + 1$$

$$\{y = 0.25x^2 - 0.125 \cos 2x + x + C_2, \quad y(0) = 0\} \Rightarrow C_2 = 0.125 \Rightarrow$$

$$\underline{y = 0.25x^2 + x - 0.125 \cos 2x + 0.125}$$

$$\{F(x, p, p') = 0, \quad y' = p(x)\} \Leftrightarrow \underline{F(x, y', y'')} = 0 \quad \text{II.}$$

$$\{F(x, p, p') = 0, \quad y^{(n-1)} = p(x)\} \Leftrightarrow \underline{F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)})} = 0 \quad (a) \text{ II}$$

דוגמה פתור : $x y'' = y' + x$

פתרון המשוואה אינו כוללת את המשתנה התלוי y . ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה $y' = p(x)$

$$\{y' = p(x), \quad x y'' = y' + x\} \Rightarrow x p' = p + x \Rightarrow \{p' = p/x + 1, \quad x \neq 0\}$$

$$p' = p/x + 1, \quad p/x = t(x) \Rightarrow x t' = 1 \Rightarrow t = \ln |x| + C \Rightarrow p = x \ln |x| + Cx \Rightarrow$$

$$y' = x \ln |x| + Cx \Rightarrow \underline{y = x^2 (0.5 \ln |x| + C_1) + C_2}$$

$$F(y, p, p dp/dy) = 0 \Leftrightarrow y' = p(y), \quad \underline{F(y, y', y'')} = 0 \quad \text{III.}$$

דוגמה פתור : $y y'' + (y')^2 + 1 = 0$

פתרון המשוואה אינו כוללת את המשתנה הבלתי תלוי x . ניתן להוריד סדר של המשוואה

$$\frac{dp}{dy} p = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = y'' \Leftrightarrow y' = p(y) \quad \text{ע"י הצבה}$$

$$\left. \begin{aligned} y y'' + (y')^2 + 1 = 0 \\ y' = p(y), y'' = p'_y p \end{aligned} \right\} \Rightarrow y \frac{dp}{dy} p + p^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} dp + \frac{dy}{y} = 0, \quad y \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 \ln |p^2 + 1| + \ln |y| = \ln |C_1| \Rightarrow \sqrt{p^2 + 1} \cdot y = C_1 \Rightarrow p = \pm \sqrt{C_1^2 - y^2} / y$$

$$\pm \frac{y}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} dy = dx \Rightarrow \mp \sqrt{C_1^2 - y^2} = x + C_2 \Rightarrow \underline{(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2}$$

האם $y = const$ פתרון ? לא, (בדוק!)

IV משוואה $F(x' y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ הומוגנית כלפי $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, זאות אמרת שהמשוואה

אינה תשתנה עקב החלפה $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ב $ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}$

$$\left(F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = t^m F(x, ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}) \right)$$

ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה $y'/y = z(x)$.

דוגמה פתור : $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$
פתרון

$$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0 \Rightarrow x \frac{y''}{y} + x(y'/y)^2 - y'/y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = z(x) \Rightarrow y' = yz \Rightarrow y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' \Rightarrow \frac{y''}{y} = z^2 + z'$$

$$x \frac{y''}{y} + x \left(\frac{y'}{y} \right)^2 - \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow x(z^2 + z') + xz^2 - z = 0 \Rightarrow xz' + 2xz^2 - z = 0$$

ומקבלים משוואת ברנולי

$$xz' + 2xz^2 - z = 0 \Rightarrow z = \frac{x}{x^2 + C_1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x^2 + C_1} \Rightarrow y = C_2 \sqrt{x^2 + C_1}$$

תרגילים

- | | |
|--|--|
| 1) $y'' = \sin x \cos x, y(0) = -1, y'(0) = 0$ | 9) $x^2 yy'' = (y - xy')^2$ |
| 2) $y'' \tan x = y' + 1$ | 10) $y'' + (y')^2 = y, y(0) = 1, y'(0) = 1/\sqrt{2}$ |
| 3) $y'' - 2y y' = 0, y(1) = 0, y'(1) = 4$ | 11) $2y y'' = (y')^2 + 1$ |
| 4) $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$ | 12) $ts'' + s' + t = 0$ |
| 5) $y''(e^x + 1) + y' = 0$ | 13) $yy'' - (y')^2 = y^2 y', y(0) = 1, y'(0) = 2$ |
| 6) $xyy'' + x(y')^2 = 3y y'$ | 14) $y'' - 2y' \cot x = \sin^3 x$ |
| 7) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ | 15) $(x^2 + 1)((y')^2 - yy'') = xyy'$ |
| 8) $y'' + y' \tan x = \sin 2x$ | 16) $y''' = (y'')^2$ |
| 17) $yy'' - (y')^2 = yy'$ | |

תשובות :

- | | |
|---|--|
| 1) $y = 0.25x - 0.125 \sin 2x - 1$ | 8) $y = C_1 \sin x - x - 0.5 \sin 2x + C_2$ |
| 2) $y = C_2 - C_1 \cos x - x$ | 9) $y = C_2 x e^{-C_1/x}$ |
| 3) $y = 2 \tan(2x - 2)$ | 10) $y = 0.25(x + \sqrt{2})^2 + 0.5$ |
| 4) $y = C_2 e^{C_1 x} - 1.5$ | 11) $C_1^2(x + C_2)^2 = 4(C_1 y - 1)$ |
| 5) $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$ | 12) $s = C_1 \ln t - 0.25t^2 + C_2$ |
| 6) $y^2 = C_1 x^4 + C_2$ | 13) $x = \ln 2y/(y+1) $ |
| 7) $C_2 + y + C_1 \ln y = x, y = C$ | 14) $y = C_1(0.5x - 0.25 \sin 2x) - (\sin^3 x)/3 + C_2$ |
| 15) $y = C_2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{C_1}$ | 16) $(y'' = z(x)), y = -(x + C_1) \ln x + C_1 + C_2 x + C_3$ |
| 17) $\{ \ln \ln y + C_1 = x + C_2, y = C \} \Leftrightarrow \{ y = a \cdot b^{e^x}, y = C \}$ | |