אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 12.08.2009
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **חדו"א למערכות מיידע 2**
מס' הקורס: 201.1.9761
סמ' ב מועד ב' משך הבחינה - 3 שעות
חומר עזר: **2 דפי נוסחאות A4 (משני צדדים),**
מחשב כיס עם צג קטן.

יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות) ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה.

בהצלחה !

שאלה מס' 1

1א) (12 נק') החליפו סדר האינטגרציה באינטגרל כפול הבא:

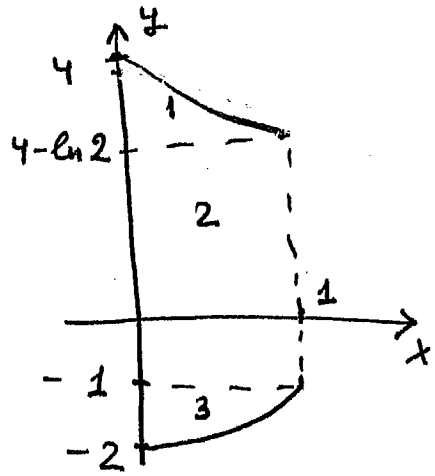
$$I = \int_0^1 dx \int_{x^3-2}^{4-\ln(x+1)} f(x,y)\,dy$$

$$I_1 = \int_{4-\ln 2}^{4} dy \int_0^{e^{4-y}-1} f\,dx$$

$$I_2 = \int_{-1}^{4-\ln 2} dy \int_0^1 f\,dx$$

$$I_3 = \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{(y+2)^{1/3}} f\,dx$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$



$y = 4 - \ln(x+1)$

1) $x+1 = e^{4-y}$
$x = e^{4-y} - 1$

2) $y = x^3 - 2$
$x = (y+2)^{1/3}$

1ב) (13 נק') מצאו נפח הגוף הכלוא בין משטחים

$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ו- $z = \sqrt{(x^2+y^2)/99}$

$$\frac{r}{\sqrt{99}} = \sqrt{25 - r^2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{11}}{2}$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3\sqrt{11}}{2}} \left(\sqrt{25-r^2} - \frac{r}{3\sqrt{11}}\right) r\,dr =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(25-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{9\sqrt{11}}\right]_0^{\frac{3\sqrt{11}}{2}} = 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(25-\frac{99}{4}\right)^{3/2} - \frac{27\cdot 11\cdot\sqrt{11}}{9\sqrt{11}\cdot 8} + \frac{125}{3}\right] = 2\pi\left[-\frac{1}{24} - \frac{33}{8} + \frac{125}{3}\right] = 75\pi \approx 235.6$$

שאלה מס' 2

מצאו נקודות על המשטח $x^2+y^2+z^2=2x$ שבהן המישור המשיק למשטח זה מאונך לישר

$$\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x-2y-z=4 \end{cases}$$

נורמל למישור משיק בנקודה (x,y,z):

$$\bar{N}=(2x-2,\ 2y,\ 2z)$$

או

$$\bar{N}=(x-1,\ y,\ z).$$

משוואת הישר:

$$x=t$$

$$\begin{cases} y+z=t-2 \\ 2y+z=2t-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=t-2 \\ z=0 \end{matrix} \Rightarrow \bar{r}=(0,-2,0)+t\overbrace{(1,1,0)}^{\bar{l}}.$$

וקטורים $\bar{N}$ ו- $\bar{l}$ צריכים לבדות קולינארים:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}, \quad z=0$$

אז

$$y=x-1,\ z=0, \qquad x^2+(x-1)^2=2x$$

$$2x^2-4x+1=0$$

$$2(x^2-2x+1)=1$$

$$x-1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

<u>שתי נקודות:</u>

$$M_1\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

$$M_2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right).$$

שאלה מס' 3

3א) (15 נק') השתמשו בטור חזקות כדי לחשב ערך האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}dx$ עם דיוק $5\cdot 10^{-3}$

הסבירו כיצד הערכתם את השגיאה.

$$I=\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}dx = \int_0^1 \left[2-\frac{2^3x^2}{3!}+\frac{2^5x^4}{5!}-\frac{2^7x^6}{7!}+\dots\right]dx =$$

$$=2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$ טור מתחלף

$$a_n=\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4(2n-1)}{(2n+1)^2\cdot 2n}<1$$

לפי משפט לייבניץ:

$$|S-S_n|<a_{n+1}$$

$$a_2=0.44,\quad a_3=0.053,\quad a_4=0.0036<5\cdot 10^{-3}$$

תשובה: מספיק לחשב

$$I\approx 2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}=1.609$$

3ב) (10 נק') משוואה $z=e^{xyz}$ מגדירה פונקציה סתומה $z=f(x,y)$ המקיימת $f(1,0)=1$. מצאו את הנגזרות מסדר ראשון של פונקציה f בנקודה $(1,0)$

$$F=e^{xyz}-z$$

$$F'_x=yze^{xyz} \qquad F'_y=xze^{xyz} \qquad F'_z=xye^{xyz}-1$$

$$F'_x(1,0,1)=0 \qquad F'_y(1,0,1)=1 \qquad F'_z(0,1,1)=-1$$

$$f'_x(0,1)=-\frac{F'_x(1,0,1)}{F'_z(1,0,1)}=0$$

$$f'_y(0,1)=-\frac{F'_y(1,0,1)}{F'_z(1,0,1)}=1$$

שאלה מס' 4

4א) (12 נק') מצאו נקודות מינימום ומקסימום מקומיים של הפונקציה הבאה

$$f(x,y)=(x+y)^3-4x^2-48y$$

$$f'_x = 3(x+y)^2 - 8x = 0$$
$$f'_y = 3(x+y)^2 - 48 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 8x = 48, \quad x = 6$$
$$(x+y)^2 = 16$$
$$x+y = \pm 4$$
$$y = -x \pm 4$$

שתי נקודות קריטיות:

$M_1(6,-2)$ $\qquad$ $M_2(6,-10)$

$$f''_{xx} = 6(x+y) - 8 \qquad f''_{xy} = 6(x+y) \qquad f''_{yy} = 6(x+y).$$

$$f''_{xx}(M_1) = 16 \qquad f''_{xy}(M_1) = f''_{yy}(M_1) = 24$$

$$\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 16 & 24 \\ 24 & 24 \end{vmatrix} < 0 \Longrightarrow$$ ב-M_1 אין אקסטרמום, אוכף

$$f''_{xx}(M_2) = -32 \qquad f''_{xy}(M_2) = f''_{yy}(M_2) = -24$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(M_2) = \begin{vmatrix} -32 & -24 \\ -24 & -24 \end{vmatrix} > 0 \\ f''(M_2) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ נק' M_2 - מקסימום מקומי

4ב) (13 נק') <u>השתמשו בשיטת כופלי לגרנז'</u> כדי למצוא מקסימום ומינימום של $f = xy$ על העקום $x^2 - xy + y^2 = 1$.

$$f = xy$$
$$g = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = y + \lambda(2x - y) \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = x + \lambda(2y - x) \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot 2\lambda + y(1-\lambda) = 0 \\ x(1-\lambda) + y \cdot 2\lambda = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

אם $\det\begin{vmatrix} 2\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} \neq 0$ פתרון של מערכת לינארית

הוא $x = y = 0$ ולא מקיים $g = 0$.

אז $\det\begin{vmatrix} 2\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - (1-\lambda)^2 = 0.$

$$1 - \lambda = \pm 2\lambda$$

$\lambda = \frac{1}{3}$ אז

$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \Rightarrow x = -y$

$x^2 + x^2 + x^2 = 1$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(M_1) = f(M_2) = -\frac{1}{3}$

$\lambda = -1$.

$-2x + 2y = 0 \Rightarrow x = y$

$x^2 - x^2 + x^2 = 1 \qquad x = \pm 1$

$M_3(1,1) \qquad M_4(-1,-1)$.

$f(M_3) = f(M_4) = 1$

$\begin{cases} \nabla g = 0 \\ g = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

אין פתרונות

תשובה:

M_1, M_2 נקודות מינימום

M_3, M_4 נקודות מקסימום

שאלה מס' 5

5א (13 נק') פתחו לטור חזקות בסביבת נקודה $x=0$ את הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

באיזה תחום הטור מתכנס?

$$\ln\frac{2-x}{2+x}=\ln\frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}=\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$t=\frac{x}{2}$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots$$

$$\ln(1-t)=-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}-\dots$$

$$\ln\frac{1-t}{1+t}=-2\Big(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\dots+\underbrace{\frac{t^{2n+1}}{2n+1}}_{a_n}+\dots\Big).$$

מבחן דלאמבר:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|t|(2n+1)}{2n+3}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\cdot|t|\Longrightarrow R=1.$$

קצוות:

$t=1$: $\quad -2\Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n+1}+\dots\Big)$

טור מתבדר (הרשאה עם טור הרמונ')

$t=-1$: $\quad -2\Big(-1-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{2n+1}-\dots\Big)$ גם מתבדר

לכן תחום ההתכנסות $|t|<1$ או $|x|<2$. מ'ג'מ $t=\frac{x}{2}$:

$$\ln\frac{2-x}{2+x}=-2\left(\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3}+\dots+\frac{(x/2)^{2n+1}}{2n+1}+\dots\right)$$

5ב (12 נק') האם טור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר ?

נוכיח שטור $\sum_1^\infty \ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$ מתכנס. בגלל ש $\ln(1+x)=x+o(x^2)$ כאשר $x\to 0$

נשווה $\quad a_n=\ln\left(\frac{n^2+5}{n^2+4}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n^2+4}\right)\approx\frac{1}{n^2+4}$

עם טור מתכנס $\sum_1^\infty b_n=\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+4}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right)\overset{\text{L'Hopital}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2+4}}\cdot\left(-\frac{2n}{(n^2+4)^2}\right)}{-\frac{2}{n^3}}=$$

$=1.$ משפט: הטור מתכנס בהחלט.