אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 13.08.08
מרצים: פרופ' א. בסר, ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: חדו"א למערכות מיידע 2
מס' הקורס: 201.1.9761
סמ' ב משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות A4 (משני צדדים)

יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות) ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה.

בהצלחה !

שאלה מס' 1 מצאו משוואת המישור העובר דרך הישר $\begin{cases} 2x-y+3z-5=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ ומקביל לווקטור $\bar{l}=(2,-1,-2)$.

$\bar{n}_1 = (2,-1,3)$

$\bar{n}_2 = (1,2,-3)$

1. וקטור נורמל של המישור:

$$\bar{l}_0 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k}$$

2. נקודה על הישר:

נקח $z=0$ ונקבל

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 8/5 \\ y = -9/5 \end{matrix}$$

$$M_0\left(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}, 0\right)$$

3. נורמל למישור הנדרש:

$$\bar{N} = \bar{l}_0 \times \bar{l} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -5\bar{i} + 0\bar{j} - 5\bar{k}$$

4. משוואת המישור:

$$-5\left(x-\frac{8}{5}\right) + 0\left(y+\frac{9}{5}\right) - 5(z-0) = 0$$

או

$$\underline{\underline{5x + 5z - 8 = 0}}$$

שאלה מס' 2 בסביבת נקודה $(1,2,0)$ משוואה $x^2+y^2+xz+e^z=6$ מגדירה z כפונקציה סתומה של x,y. מצאו את פיתוח טיילור מסדר 2 של $z(x,y)$ בסביבת נקודה $(1,2)$.

הפונקציה z מוגדרת על ידי המשוואה $F(x,y,z)=0$ כאשר $F(x,y,z)=x^2+y^2+xz+e^z-6$. לפי הנוסחאות של גזירה סתומה מתקיים

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x+z}{x+e^z}$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2y}{x+e^z}$$

ובהצבת $x=1,y=2,z=0$ נקבל

$$z'_x(1,2)=-1,\quad z'_y(1,2)=-2$$

עכשיו נחשב את הנגזרות השניות, כאשר מתייחסים ל- z כפונקציה של x,y.

$$z''_{xx}=-\frac{(2+z'_x)(x+e^z)-(2x+z)(1+e^z z'_x)}{(x+e^z)^2}$$

$$z''_{yy}=-2\frac{(x+e^z)-ye^z z'_y}{(x+e^z)^2}$$

$$z''_{yx}=-\frac{-2y(1+e^z z'_x)}{(x+e^z)^2}$$

ואחרי הצבה

$$z''_{xx}(1,2)=-\frac{1}{2},\quad z''_{yy}(1,2)=-3,\quad z''_{xy}(1,2)=0$$

נוסחת טיילור לסדר שני נותנת עכשיו את הפיתוח

$$\begin{aligned}&z(1,2)+z'_x(1,2)(x-1)+z'_y(1,2)(y-2)\\&+\frac{1}{2}\left(z''_{xx}(1,2)(x-1)^2+2z''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2)+z''_{yy}(1,2)(y-2)^2\right)\\&=-(x-1)-2(y-2)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2-3(y-2)^2\right)\end{aligned}$$

שאלה מס' 3 השתמשו בהחלפת משתנים כדי לחשב נפח של הגוף הבא:

$$\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \ y\ge 0,\ \ \frac{x}{2}\le z\le x\right\}$$

צריך לחשב את האינטגרל הכפול $\iint_D (x-x/2)dxdy$ כאשר התחום הוא התחום של (x,y) האפשריים. במקרה זה יש לשים לב שהתנאי $x/2 \le z \le x$ מכתיב ש- $x/2 \le x$ ולכן $x \ge 0$. לכן D מוגדר על ידי

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, \quad ,x\ge 0, \quad y\ge 0$$

נשתמש לחישוב האינטגרל בקואורדינטות קוטביות מוכללות $(x,y)=r(a\cos(\theta),b\sin(\theta))$

מכיוון שהתחום הוא הרביע החיובי של אליפסה בקואורדינטות החדשות הוא

$0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/2$. ידוע שהיעקוביאן הוא $J=abr$ והאינטגרל הוא אם כן

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \frac{ar\cos(\theta)}{2}abrdr\right)d\theta\\
&=\frac{a^2b}{2}\int_0^{\pi/2}\left(r^3\cos(\theta)|_0^1\right)d\theta\\
&=\frac{a^2b}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}\cos(\theta)d\theta\\
&=\frac{a^2b}{6}\sin(\theta)|_0^{\pi/2}\\
&=\frac{a^2b}{6}
\end{aligned}$$

הערה: מי שהתייחס לתחום כאילו הוא התחום שבין הקווים $z=x$ ו- $z=x/2$ וקיבל לפיכך כפליים מהתשובה הנכונה קיבל את מלוא הנקודות.

שאלה מס' 4

4א (13 נק') מצאו את נקודה או נקודות מהמשטח $2x^2+3y^2+2z^2+2xz=6$ הרחוקות ביותר ממישור $z=0$.

מרחק מנק' (x,y,z) למישור $z=0$: $d=|z|$.

נחפש

$$\begin{cases} \max z^2 \\ 2x^2+3y^2+2z^2+2xz-6=0 \end{cases}$$

$$f=z^2, \quad g=\ldots$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=\lambda(4x+2z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=\lambda(6y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial g}{\partial z}=2z+\lambda(4z+2x)=0 \\ 2x^2+3y^2+2z^2+2xz-6=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=0 \longrightarrow z=0 \longrightarrow 2x^2+3y^2=6 \\ z=0 \longrightarrow f=0 \longrightarrow \text{min} \end{cases}$$

נקודות של

$$\lambda\neq 0 \longrightarrow \quad z=-2x, \quad y=0$$

$$2x^2+3\cdot 0+8x^2=4x^2=6$$

$$\boxed{M_1, M_2: \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \\ z=\mp 2 \end{cases}} \Longrightarrow f(M_1)=f(M_2)=2$$

אלו שתי הנקודות הרחוקות ביותר

הערה: צריך לבדוק גם נקודות

$\nabla g=0$ } אין למשוואה
$g=0$ } אין פתרונות

4ב (12 נק') מצאו מינימום מקומי, מקסימום מקומי ונקודות אוכף של פונקציה

$$f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2-8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6x=0 \qquad x=0 \text{ או } x=-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-6y=0 \qquad y=0 \text{ או } y=2$$

נקודות קריטיות:

$M_1(0,0)$, $M_2(0,2)$, $M_3(-2,0)$, $M_4(-2,2)$.

$$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x+6 & 0\\ 0 & 6y-6\end{pmatrix}$$

$\Delta(M_1)=-36<0 \Longrightarrow$ נק' M_1: אוכף

$\Delta(M_2)=+36>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6>0 \Rightarrow$ נק' M_2: min

$\Delta(M_3)=+36>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6<0 \Longrightarrow$ נק' M_3: max

$\Delta(M_4)=-36<0 \Longrightarrow$ נק' M_4: אוכף

	Δ_2	Δ_1	
אוכף	−		(0,0)
min	+	+	(0,2)
max	+	−	(−2,0)
אוכף	−		(−2,2)

שאלה מס' 5

5א (13 נק') מצאו את התחום ההתכנסות של טור חזקות $2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$
מהו סכום של הטור?

נתון

$$2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

מקבלים ע"י גזירה של טור הצקות

$$x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots =$$

$$= \underbrace{(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n)}_{\text{טור בעל רד'ום}} - 1 - x$$

בתכנסות $R=1$. בתחום ההתכנסות
סכום של הטור $S(x)=\frac{1}{1-x}$

אזי גם הטור $2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$ בעל רד'ום
התכנסות $R=1$. עבור $|x|<1$ ניתן לגזור איבר-איבר

$$2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\left[\frac{1}{1-x}-1-x\right]'=$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}-1$$

כאשר $x=\pm 1$ הטור מתבדר (איבר כללי לא שואף ל-0)

5ב (12 נק') האם הטורים הבאים מתכנסים ?

(I) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{3^n}$; (II) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(n)}{n\ln^2(n)}$

(I) מבחן d'Alambert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+1)^2+1}{2n^2+1}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}<1$$

. לכן הטור מתכנס

(II)

$$|a_n|=\frac{|\sin n|}{n\ln^2(n)}\le b_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$$

לפי מבחן אינטגרל $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ מתכנס אם ורק אם

$$\lim_{A\to\infty}\int_2^A\frac{dx}{x\ln^2 x}<\infty$$

$$\int_2^A\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_2^A\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^A$$

$$\lim_{A\to\infty}\int_2^A\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln A}\right)=\frac{1}{\ln 2}<\infty$$

לכן הטור מתכנס בהחלט