אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 25.07.07
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **חדו"א למערכות מידע 2**
מס' הקורס 0201.1.9761
מועד א סמ' ב
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות, מחשב כיס קטן.

יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה. אין צורך לציין שאלות לבדיקה.
לכל שאלה משקל שווה (25 נקודות). נא לכתוב באופן ברור ומסודר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1 א. (15 נק') מצאו את כל הנקודות על המשטח $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ שבהן המישור המשיק הינו מקביל למישור $ax+by+cz=1$.

שאלה מס' 1 ב. (10 נק') מצאו משוואה של מישור המכיל את הישר $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ ומאונך למישור $3x+y-z+2=0$.

שאלה מס' 2 א. (15 נק') מצאו נפח של הגוף החסום על ידי משטחים:

$$x^2+y^2=y,\quad x^2+y^2=4y,\quad z=0,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$$

שאלה מס' 2 ב. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: אם אחד משני טורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס בהחלט והשני בתנאי אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

שאלה מס' 3. מהם <u>תחום ההתכנסות וסכום</u> של טור $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-3n)(x-1)^n$?

<u>רמז</u>: למציאת הסכום ניתן להשתמש בטור $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ובנגזרות שלו.

שאלה מס' 4. מצאו את הערך המינימאלי ואת הערך המקסימאלי של פונקציה $f(x,y)=x^2+x+y^2$ בתחום $D=\{\,(x,y)\mid (x-1)^2+(y-3)^2\le 45\,\}$

שאלה מס' 5 א. (13 נק') בסביבת נקודה $M(2,2,1)$ משוואה $3^{x/z}+3^{y/z}=18$ מגדירה את פונקציה $z=f(x,y)$. האם הפונקציה הזו עולה או יורדת בנקודה $M_1(2,2)$ בכיוון לראשית הקואורדינאטות?

שאלה מס' 5 ב. (12 נק') שנו את הסדר של אינטגרציה בביטוי

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2}dy\, f(x,y)+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{3-x}{2}}dy\, f(x,y)$$

והציגו אותו כאינטגרל אחד. חשבו את האינטגרל הזה במקרה פרטי $f(x,y)=x+y$.

$$F(x,y,z)=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1=0$$

(א 1

משוואת המישור בנק' $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

שני המישורים מקבילים אם

$$\frac{F'_x(M_0)}{a}=\frac{F'_y(M_0)}{b}=\frac{F'_z(M_0)}{c}$$

אז

$$\frac{2x_0}{a^3}=\frac{2y_0}{b^3}=\frac{2z_0}{c^3}=k$$

$$x_0=\frac{ka^3}{2},\quad y_0=\frac{kb^3}{2},\quad z_0=\frac{kc^3}{2}$$

$$F(x_0,y_0,z_0)=0 \implies \frac{k^2}{4}\left(\frac{a^6}{a^2}+\frac{b^6}{b^2}+\frac{c^6}{c^2}\right)=1$$

$$k=\pm\frac{2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$$

תשובה:

$$(x_0,y_0,z_0)=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}(a^3,b^3,c^3)$$

ב) נסמן $\bar{N}$ נורמל למישור המבוקש. אז $\bar{N}$ מאונך לנורמל של המישור הנתון, $\bar{N}_1=(3,1,-1)$ וגם לווקטור כיוון של הישר, $\bar{l}=(3,-1,4)$. מכאן נובע ש-$\bar{N}$ קולינארי ל- $\bar{N}_1\times\bar{l}$

$$\bar{N}=\bar{N}_1\times\bar{l}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=3\bar{i}-15\bar{j}-6\bar{k}$$

אז $\bar{N}=\bar{i}-5\bar{j}-2\bar{k}$. נק' $M_0(-1,2,0)$ שייכת למישור. משוואת המישור:

$$1(x+1)-5(y-2)-2z=0$$

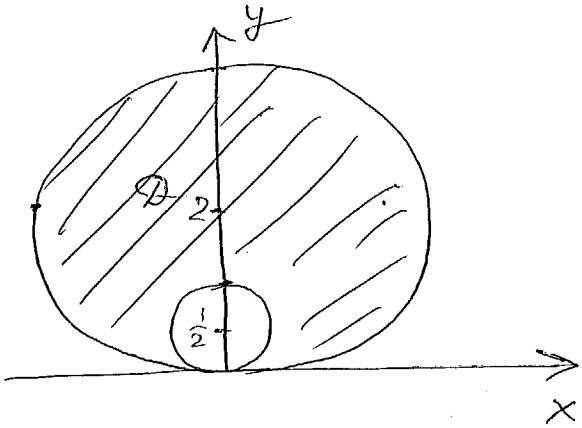
$$x-5y-2z+11=0$$

אז

(K2

$$x^2+y^2=y \iff x^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}$$

$$x^2+y^2=4y \iff x^2+(y-2)^2=4$$



$$V=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$x=r\cos\varphi \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$y=r\sin\varphi$$

$$D=\{(r,\varphi)\mid 0\le\varphi\le\pi,\ \sin\varphi\le r\le 4\sin\varphi\}$$

$$V=\int_0^{\pi}d\varphi\int_{\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r\cdot r\,dr=\int_0^{\pi}d\varphi\,\frac{r^3}{3}\Big|_{\sin\varphi}^{4\sin\varphi}=\frac{63}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} u=\cos\varphi \\ du=-\sin\varphi\,d\varphi \\ \sin^2\varphi=1-u^2\end{array}\right\}=-21\int_1^{-1}(1-u^2)\,du=\underline{\underline{28}}$$

ב) יהי $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, ו$\sum b_n$ מתכנס בהחלט. בגלל שו$\sum a_n$ מתכנס $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ואז סדרת $\{a_n\}$ חסומה: קיים מספר M כך ש- $|a_n|\le M$ $\forall n$. מכאן

$$|a_n b_n|\le M|b_n|$$

ו$\sum M|b_n|$ מתכנס כי $\sum b_n$ מתכנס בהחלט.

אז גם $\sum a_n b_n$ מתכנס בהחלט.

3) נסמן $y=x-1$ ונשתמש במבחן d'Alambert

עבור טור $\sum_{1}^{\infty}(n^2-3n)y^n$:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-3(n+1)}{n^2-3n}=1$$

אז $R=1$. כלומר שטור מתבדר בקצוות $y=\pm R$ ⊛.

תחום ההתכנסות: $|y|<1$ או $\underline{\underline{0<x<2}}$

נחשב את הסכומים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}y^n=\frac{1}{1-y} \qquad (|y|<1)$$

נגזור לפי y:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}=\frac{1}{(1-y)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)y^{n-2}=\frac{2}{(1-y)^3}$$

אם כן:

$$S(y)=\sum_{1}^{\infty}(n^2-3n)y^n=\sum_{2}^{\infty}n(n-1)y^n-2\sum_{1}^{\infty}ny^n=$$

$$=y^2\sum_{2}^{\infty}n(n-1)y^{n-2}-2y\sum_{1}^{\infty}ny^{n-1}=$$

$$=\frac{2y^2}{(1-y)^3}-\frac{2y}{(1-y)^2}=\frac{2y(y-1+y)}{(1-y)^3}=\frac{2y(2y-1)}{(1-y)^3}$$

נזכר $y=x-1$:

$$\underline{\underline{S(x)=\frac{2(x-1)(2x-3)}{(2-x)^3}}}$$

⊛ אבר כללי a_n לא שואף לאפס כאשר $n\to\infty$

א) נחפש נקודות קריטיות:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x+1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{matrix}$$

$M_0\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in D \qquad f(M_0) = -\frac{1}{4}$

ב) נשתמש בכופלי Lagrange:

$$g = (x-1)^2 + (y-3)^2 - 45$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+1+2\lambda(x-1) = 0 \\ 2y + 2\lambda(y-3) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 - 45 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda+1} \qquad y = \frac{3\lambda}{\lambda+1}$$

$$\left(\frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda+1} - 1\right)^2 + \left(\frac{3\lambda}{\lambda+1} - 3\right)^2 = 45$$

$$\frac{\frac{9}{4} + 9}{(\lambda+1)^2} = 45 \qquad \underline{\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}}$$

λ_1: $M_1(-2, -3)$, $\quad f(M_1) = 11$

λ_2: $M_2(4, 9)$, $\quad f(M_2) = 93$

תשובה: ערך מינימלי: $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

ערך מקסימלי: $f(4, 9) = 101$

$$F = 3^{\frac{x}{z}} + 3^{\frac{y}{z}} - 18 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln 3 \cdot 3^{x/z} \frac{1}{z} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \ln 3 \cdot 3^{y/z} \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \ln 3 \left(3^{\frac{x}{z}} \left(-\frac{x}{z^2}\right) + 3^{\frac{y}{z}} \left(-\frac{y}{z^2}\right)\right) =$$

$$= -\ln 3 \left(x\, 3^{x/z} + y\, 3^{y/z} \right) \frac{1}{z^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_M = \frac{1 \cdot 3^2}{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2} = \frac{1}{4}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_M = \frac{1}{4}$$

לכן גרדיאנט:

$$\nabla f = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

וקטור $\overline{M_1 O} = (-2,-2)$ ואחד נורמלי

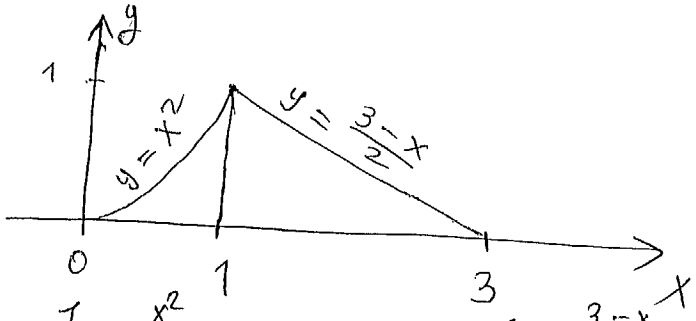
$$\bar{n} = \frac{\overline{M_1 O}}{|\overline{M_1 O}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}\right|_{M_1} = \nabla f \cdot \bar{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{4} < 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{n}} < 0$$

כלומר $f(x,y)$ יורדת בכיוון הראשי הפנימי בנק' M_1.

(25



$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, f(x,y) + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} dy\, f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} y=x^2 \to x=\sqrt{y} \\ y=\frac{3-x}{2} \to x=3-2y \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$$

עבור $f=x+y$ מקבלים:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} (x+y)\,dx = \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{3-2y} =$$

$$= \int_0^1 dy \left[\frac{(3-2y)^2}{2} + (3-2y)y - \frac{y}{2} - y^{3/2} \right] =$$

$$= \int_0^1 dy \left[\frac{9}{2} - \frac{7y}{2} - y^{3/2} \right] = \frac{9}{2} - \frac{7}{4} - \frac{2}{5} = \frac{47}{20}$$