חדו"א 2 להנדסת חשמל
דף תרגילים 2 -- טורים מספריים

1) הוכח על סמך ההגדרה שהטורים הבאים מתכנסים וחשב את סכומם:

1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} 9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 6+4+\frac{8}{3}+\frac{16}{9}+\frac{32}{27}+\ldots;$

1.2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\ldots;$

1.3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{4^n} = \frac{1}{4}+\frac{4}{16}+\frac{7}{64}+\frac{10}{256}+\ldots.$

<u>רמז</u>: הוכח שלכל n טבעי מתקיים: $S_n = \frac{1}{3}\cdot\left(2-\frac{3n+2}{4^n}\right).$

2) הוכח כי הטורים הבאים מתבדרים:

2.1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n+1};$ **2.2)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{n^2-n+4}{n^2+n+1};$ **2.3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-5}{2n+1}-\frac{3n}{2}\right);$

2.4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n;$ 2.5) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n^2+1);$ 2.6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+n-1}{3n^2-5n}\right)^{n-1};$ 2.7) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(\sqrt{n^2+1}-n).$

3) קבע אם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

3.1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4};$ 3.2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n};$ 3.3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{\ln n}};$ 3.4) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n}.$

3.5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n^5+3n+2};$ 3.6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{5n+3}}{\sqrt{n^4+3n+1}};$ 3.7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5n-3}-\frac{1}{5n+3}\right);$ 3.8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^5}};$

3.9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right].$ 3.10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{5^n};$ 3.11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+5n+2)\cdot e^n}{2^n+3^n};$ 3.12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{5n+3}\right)^n;$

3.13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};$ 3.14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot 5^n}{n!};$ 3.15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n};$ 3.16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$

4) הוכח באמצעות כלל העיבוי:

4.1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס כאשר $p>1$ ומתבדר כאשר $p\le 1$.

4.2) הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot \ln^q n}$ מתכנס כאשר $q>1$ ומתבדר כאשר $q\le 1$.

5) בדוק באמצעות מבחן לייבניץ את התכנסות של הטורים הכלליים הבאים. אם הטור מתכנס, קבע את סוג ההתכנסות (בהחלט או בתנאי):

5.1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3n-1}{5n+4}$; 5.2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$; 5.3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$; 5.4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$;

6) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

6.1) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס.

6.2) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס.

6.3) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתבדר.

6.4) אם אחד משני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו - $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס בהחלט והשני מתכנס בתנאי, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

6.5) אם שני הטורים החיוביים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו - $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$ מתכנס.

6.6) אם מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ מתכנס.