תרגיל 8 - טופולוגיה
להגשה עד יום א' 29.6.10

אקסיומות הפרדה

1. הוכיחו שמרחב האוסדורף קומפקטי הוא נורמלי.

2. לכל אחת מהתכונות הבאות הוכיחו - אם זה אכן נכון - שהתכונה נשמרת במכפלות כלשהן ואם לא, מצאו דוגמה נגדית.
(א) האוסדורף (ב) רגולרי (ג) טיכונוף (ד) נורמלי.

3. הוכיחו את משפט ההרחבה של Tietze: אם X מרחב האוסדורף נורמלי, $A\subseteq X$ סגורה ו-$f: A\to[0,1]$ רציפה, אז יש פונקציה רציפה $g: X\to[0,1]$ כך ש-$g|_A=f$.

הדרכה: בנו את g כגבול במידה שווה של פונקציות רציפות על X.

הערה: שימו לב שמשפט זה מכליל את הלמה של אוריסון.

קבוצות קומפקטיות ב-$\mathbb{R}^n$

4. א. קבוצה $B\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת גוף קמור אם B סגורה, קמורה, חסומה, פנים לא ריק.

הוכיחו שכל שני גופים קמורים ב-$\mathbb{R}^n$ הומאומורפיים זה לזה. (רמז: משהו כמו קואורדינטות פולריות).

5. נניח ש X, Y מרחבים טופולוגיים הומאומורפיים.
הוכיחו שאם לכל $f: X \to X$ רציפה יש נקודת
שבת אז לכל $g: Y \to Y$ רציפה יש נקודת
שבת (ולהיפך). כלומר: התכונה שלכל פ' רציפה ממרחב
לעצמו יש נ"ש היא תכונה טופולוגית.

קומפקטיפיקציית אלכסנדרוף

6. מרחב טופ' X נקרא "קומפקטי מקומית" אם
לכל נקודה $x \in X$ יש סביבה קומפקטית, $x \in D$
כלו' קבוצה קומפקטית $D \subseteq X$ שמקיימת $x \in \operatorname{int} D$.

נניח ש X קומפקטי מקומית ונגדיר טופ' על $Y := X \cup \{y\}$
$A \subseteq X$ פתוחה בתוכה, ואז סביבה של y ב-Y היא
משלימה ב-Y של תת קבוצה קומפקטית $D \subseteq X$.
הוכיחו ש Y הוא קומפקטיפיקציה של X,
ו- Y מרחב האלכסנדרוף.

7. הוכיחו שמרחב כל העל-מסננים של $\mathbb{N}$
הוא קומפקטיפיקציה של $\mathbb{N}$ עם טופ' דיסקרטית.
(לא להשתמש בתרגיל 6). מהי הקומפקטיפיקציה
של $\mathbb{N}$ הדיסקרטי שמתקבלת כמו בשאלה 6?
(מהן הקבוצות הקומפקטיות ב-$\mathbb{N}$ הדיסקרטי?).
לכל אחת משתי הקומפקטיפיקציות של $\mathbb{N}$ הדיסקרטי
קבעו האם היא מטריזבילית או לא.