פתרונות

תרגיל 6

1. הגדרת המטריקה על $X_1 \cup X_2$ היא:

$$d(x,y) = \inf\{ d_1(x,z) + d_2(z,y) \mid z \in X_1 \cap X_2 \}$$

עבור $x \in X_1$, $y \in X_2$.

2. נניח ש-X חסום כליל ויש $\langle x_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרה ב-X.
נגדיר $c(m,n)=0$ אם $1 \le d(x_n,x_m)$ ו-$c(m,n)=1$ אחרת.
ממשפט רמזי יש תת קבוצה $A_1 \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית, כך שלכל
$m,n\in A_1$ $d(x_n,x_m)<1$. באופן אינדוקטיבי נמצא k $A_{k+1}\subseteq A_k$
אינסופית ולכל $m,n\in A_k$ $d(x_m,x_n)<\frac{1}{k}$. יהי $m_k = \min A_k$.
אז לכל k_0, $x_{m_{k_1}}, x_{m_{k_2}}$ ב-A_{k_0} ולכן המרחק ביניהם
קטן מ-$\frac{1}{k_0}$. אז $\langle x_{m_k} : k\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קושי.

אם X לא חסום כליל אז יש ε וקבוצה
$\{x_n : n\in\mathbb{N}\} \subseteq X$ כך שלכל $m,n\in\mathbb{N}$ $d(x_m,x_n)\ge\varepsilon$.
כל מניה חח"ע של הקבוצה היא סדרה ללא תת-סדרת קושי.

3. $X = \{F \mid F\subseteq P(\mathbb{N})$ אולטרפילטר$\}$. לכל $A\subseteq\mathbb{N}$, נגדיר
$\hat{A} = \{F\in X \mid A\in F\}$. אם $F\in X$, $A\notin F$, עבור $A\subseteq\mathbb{N}$,
אז ממקסימליות F, ~~מקסימלי~~ $\mathbb{N}\setminus A\in F$, לכן $X\setminus\hat{A} = \widehat{(X\setminus A)}$.
אם $A,B\in F$ אז $A\cap B\in F$ וכמובן שאם $A\cap B\in F$ אז $A\in F$, $B\in F$.
לכן $\hat{A}\cap\hat{B} = \widehat{A\cap B}$. משתי התכונות האלה נובע שחיתוך
מס' סופי של קבוצות מהצורה $\hat{A}$ הוא מהצורה הזו (או ריק)
ולכן $\{\hat{A} \mid A\}$ בסיס לטופולוגיה. גם, כל $\hat{A}$ סגורה.
אכן

ב. צפיפות המסננים הראשיים. יהי F ב-X כלשהו ותהי $\hat{A}$ סביבה פתוחה בסיסית כלשהי של F. אז $A\in F$, לכן $A\neq\emptyset$. נבחר $n\in A$ ויהי F_n העל-מסנן הראשי שנוצר ע"י $\{n\}$. מכאן, $A\in F_n$ כי $\{n\}\subseteq A$. אז F_n ב-$\hat{A}$.

ג. האוסדורף: אם $F_1\neq F_2$ ב-X יש (קב') $A\in F_1$ כך ש $A\notin F_2$ ולכן, ממקסימליות, $(\mathbb{N}\setminus A)\in F_2$. אז $\hat{A}$, $\widehat{(\mathbb{N}\setminus A)}$ זרות פתוחות בסיסיות שמפרידות את F_1 ו F_2.

3. (X,τ) קומפקטי.

<u>הוכחה 1:</u> ונניח $X=\bigcup\{\hat{A}_\alpha:\alpha\in I\}$ כיסוי פתוח, בה"כ ע"י קבוצות פתוחות בסיסיות, ונניח אין כיסוי סופי. אז לכל $D\subseteq I$ סופית $X\neq\bigcup\{\hat{A}_\alpha:\alpha\in D\}$. יש F_D ב-$X\setminus\bigcup_{\alpha\in D}\hat{A}_\alpha$. אז $(\mathbb{N}\setminus A_\alpha)$ ב-F לכל $\alpha\in D$ ולכן חיתוך כל ה-$(\mathbb{N}\setminus A_\alpha)$, $\alpha\in D$, מכאן, $\{(\mathbb{N}\setminus A_\alpha):\alpha\in D\}$ מקיים את"ס: כל חיתוך סופי שייך לאיזשהו מסנן, ולכן לא ריק. אז יש מסנן מקס' F כך ש $(\mathbb{N}\setminus A_\alpha)\in F$ <u>לכל</u> $\alpha\in I$ ואז $A_\alpha\notin F$ לכל $\alpha\in I$ וזו סתירה ל $\bigcup_{\alpha\in I}\hat{A}_\alpha = X$.

<u>הוכחה 2:</u> ויהי $\{D_\alpha:\alpha\in I\}$ אוסף קבוצות סגורות עם תכונת החיתוך הסופי ונוכיח ש $\bigcap_{\alpha\in I}D_\alpha\neq\emptyset$.

מכיוון שכל קבוצה סגורה היא חיתוך של קבוצות סגורות בסיסיות מהצורה $\hat{A}$, ולכן אם $F\notin D_\alpha$ יש סגורה בסיסית $\hat{A}$ ב-D, $F\notin\hat{A}$, אפשר להניח

אם $\{O_\alpha : \alpha \in I\}$ ו $\{\hat{A}_\beta : \beta \in J\}$

עם אלו חיתוך ריק. אז נקבל ש $\bigcap_{\beta \in J} \hat{A}_\beta \neq \emptyset$

מכאן ש... כמו בהוכחה A $\{A_\beta : \beta \in J\}$

בעל תח"ס ולכן יש על-מסנן F שמכיל את האיברים הנ"ל,

כלומר $A_\beta \in F$ לכל $\beta \in J$ אז $F \in \bigcap \hat{A}_\beta$.

הוכחה 3: יהי G על-מסנן על X (נניח), על-מסנן על קבוצה $\mathcal{P}$ (על-מסננים) ונוכיח ש-G מתכנס ל $F \in X$.

לכל $A \subseteq \mathbb{N}$, או $\hat{A} \in G$ או $\widehat{\mathbb{N} \setminus A} \in G$. אם $\hat{A}, \hat{B} \in G$

אז גם $\hat{A} \cap \hat{B} = \widehat{A \cap B} \in G$ ולכן $\emptyset \neq A \cap B$,

כמו כן, אם $A \subseteq B$ ו $\hat{A} \in G$ אז $\hat{B} \in G$. מכאן:

$$\{A \mid \hat{A} \in G\} = F \in X$$

על-מסנן, ו G מתכנס אליו.

ב. אין ב X סדרה מתכנסת, פרט לסדרות ~~שקבועות~~

מחקום מסוים והלאה. נניח ש $F_n \to F$

ונוכיח שיש m_0 כך ש $F_n = F$ לכל $n \geq m_0$.

לכל סביבה בסיסית בצורה $\hat{A}$ $(A \in F)$ של F יש

$m(A)$ כך שלכל $n \geq m(A)$ מתקיים $A \in F_n$. אז,

$$F = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} F_n$$

שימו לב ש- $\bigcap_{n \geq m} F_n$ הוא מסנן (לא בהכרח מרבי), ונסמנו G_m.

אם $m_1 \leq m_2$ אז $G_{m_1} \subseteq G_{m_2}$, לכן $F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} G_m$

וזהו איחוד עולה של מסננים.

טעם ההוכחה נובעת מהטענה הבאה, שמעניינת כשלעצמה:

טענה: אם F על-מסנן על $\mathbb{N}$ ו- $F=\Uparrow G_n$ כאשר G_n

מסנן, אז יש m_0 כך שלכל $m_0 \le n$ $G_n = F$. הסימון $\Uparrow$

פירושו "עולה", כלו' $m<n \Rightarrow G_m \subseteq G_n$.

הוכחה: אם אין m_0 כאמור בטענה, אז לכל m יש

$m<n$ כך ש- $G_m \subsetneq G_n$. על ידי מעבר לתת-סדרה

אפשר להניח שלכל n $G_n \subsetneq G_{n+1}$. נבחר באינדוקציה

סדרת קבוצות $C_n \subseteq \mathbb{N}$. $C_0=\mathbb{N} \in G_0$.

להגדרת C_{n+1} נבחר $A_{n+1}\in G_{n+1}$, $G_n \not\ni A_{n+1}$.

קיימת כי $G_{n+1}\neq G_n$, ונגדיר $C_{n+1}=A_{n+1}\cap C_n$. ברור

ש $C_n \supseteq C_{n+1}$.

מכיון ש $G_n\subseteq G_{n+1}$ ו $C_n\in G_n$, נקבל $C_{n+1}\in G_{n+1}$.

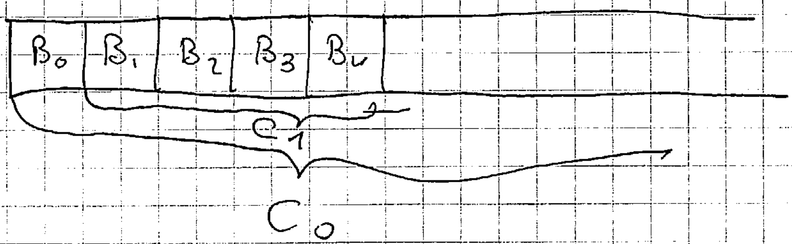
נגדיר $B_n = C_n \setminus C_{n+1}$. אם $B_n=\emptyset$ אז $C_{n+1}=C_n$

מה שלא ייתכן, כי $C_{n+1}\notin G_n$ ואילו $C_n\in G_n$.

לכן $B_n\neq\emptyset$.

קיבלנו סדרה יורדת $\mathbb{N}=C_0 \supsetneq C_1 \supsetneq C_2 \cdots$

ומתקיים: לכל n $G_n \not\ni C_{n+1}\in G_{n+1}$.



לכל n, $B_0\cup B_1 \cdots \cup B_n$ זרה ל C_{n+1} ששייכת ל-F

לכן $B_0\cup\cdots\cup B_n \notin F$. בפרט, לכל m,

$B_0\cup\cdots\cup B_n \notin G_m$

נגדיר $D=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{2i}$ $E=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{2i+1}$

אז $D\cap B=\emptyset$ ולכן $\mathbb{N}=C_0=D\cup E$

בודאי אחת משתי הקבוצות D,E שייכת ל-F,

(אולטרא-מסנן). נניח שזו D.

נראה ש $D\notin G_n$ לכל n, וזה יסיים את ההוכחה.

יהי n כלשהו. $G_n \not\ni D\cap\bigcup_{i\geq n} B_i$

ואילו $G_n\not\ni D\cap C_{n+1}$ ולכן $D\notin G_n$.

(אילו $G_n \ni D\cap C_{n+1}$, אז גם $C_{n+1}\in G_n$ – סתירה).

4. השלמה של מ"מ X קומפקטית אמ"ם X חסום כליל.

נניח X חסום כליל ותהי $\langle y_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרה בהשלמה $\hat{X}$.

לכל n נבחר $x_n\in X$ כך ש $d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$. זה

אפשרי כי X צפוף ב-$\hat{X}$. מכך ש X חסום כליל

יש ל-$\langle y_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ תת-סדרה שהיא סדרת קושי (בה"כ

הסדרה עצמה). מכך ש $\hat{X}$ שלם, הסדרה $\langle x_n : n\in\mathbb{N}\rangle$

שגם היא קושי (הוכיחו) מתכנסת.

הכיוון השני ברור.