1 אקסיומות מניה והפרדה

ראינו בפרקים הקודמים כי למרחבי האוסדורף, למשל, תכונות טובות רבות שאינן קיימות במרחבים טופולוגים כלליים. אקסיומת האוסדורף נקראת אקסיומת הפר-דה, משום שהיא מבטיחה את האפשרות להפריד בין שתי נקודות - כלומר למצוא קבוצות פתוחות זרות המכילות כל אחת מן הנקודות. בראשית ימיה של הטופולוגיה הקבוצתית התפתחה תעשיה שלמה של אקסיומת הפרדה, וחקר היחסים בינהן. במבחן הזמן נתגלו רק מעט מן האקסיומות הללו כשימושיות, ובפרק זה נסקור בקצרה אותן ואת המסקנות העיקריות הנובעות מהן. אנו נתמקד באקסימות שיסיעו לנו לענות על השאלה: בהנתן מרחב טופולוגי X, מתי יש מטריקה d על X כך שהטופולוגיה המטרית ש-d משרה על X מתלכדת עם הטופולוגיה המקורית - במילים אחרות: מתי X מטריזבילי.

ראינו כבר שאם X מטריזבילי אז X האוסדורף. אבל הרבה יותר מזה נכון: אם X מטריזבילי אז לכל נקודה $x \in X$ ולכל סגורה $C \subseteq X$, אם $x \notin C$ אז יש פתוחות $x \in U$ ו-$C \subseteq V$ זרות. כדי לראות זאת, יספיק לשים לב שאם d מטריה על X המשרה את הטופולוגיה המקורית ו-C קבוצה כלשהי אז $x \in \bar{C}$ אם ורק אם $\inf\{d(x,y) : y \in C\} = 0$. אבל אפילו יותר מזה נכון: אם X מטריזבילי אז לכל סגורות זרות $C_1, C_2 \subseteq X$ יש פתוחות $U_i \supseteq C_i$ זרות. נשתמש באבחנה הקודמת כדי לראות זאת: לכל $x \in C_i$ אפשר למצוא כדור $B := B_{\epsilon(x)}(x)$ כך ש-$B \cap C_{3-i} = \emptyset$. עתהף מאי שוויון המשולש ברור ש-$\bigcup_{x \in C_i} B_{\epsilon(x)/2}(x)$ פתוחות וזרות המכילות את C_i, כנדרש.
התכונות הללו זכו לשמות:

הגדרה 1.1 מרחב טופולוגי יקרא רגולרי אם לכל קבוצה סגורה C ולכל נקודה $x \notin C$ קיימות פתוחות זרות $x \in U$ ו-$C \subseteq V$. המרחב יקרא נורמלי אם לכל C_1, C_2 סגורות וזרות יש פתוחות U_1, U_2 זרות כך ש-$C_i \subseteq U_i$.

נשים לב שמרחב האוסדורף נורמלי הוא רגולרי. למעשה, טענה זו נובעת כבר מן ההנחה החלשה יותר שכל נקודה במרחב היא סגורה. אלא שאם X מרחב טופולוגי רגולרי כך שהנקודות של X סגורות אז ברור ש-X האוסדורף. בספרות כוללות, בד"כ הנחות הרגולריות והנורמליות את הדרישה שנקודות הן סגורות - ברשימות אלו נאמץ מקובלה זו. תכונה מאפינת של נורמליות היא שלכל $C, B \subseteq$

X סגורות וזרותיש פתוחות U ו-V המכילות את C ו-B בהתאמה כך ש- $\bar{V} \cap U = \emptyset$. תחת ההנחה שהמרחב האוסדורף, אם תכונה זו נכונה עבור C סגורה ו-B נקודה, אז המרחב רגולרי, תכונה זו מאפינת רגולריות. אנחנו נשתמש בתכונה זו של נורמליות באופן חופשי. נעיר כי בעוד תכונת הרגולריות היא סבירה למדי מבחינת התנהגותה הטופולוגית, תכונת הנורמליות ידידותית הרבה פחות, ולכן נשתדל - במידת האפשר לעבוד עם הראשונה ולא עם השניה (בהמשך נראה תנאי מספיק שימושי לכך שמרחב רגולרי הוא נורמלי).

<u>תרגיל</u>: תת-מרחב של מרחב רגולרי הוא רגולרי ומכפלה כלשהי של מרחבים רגולר-ים היא רגולרית. האם תוכלו להראות (רשות) שמכפלה של מרחבים נורמלים אינה בהכרח נורמלית ושתת מרחב של מרחב נורמלי אינו בהכרח נורמלי?

הגדרה 1.2 הלמה הבאה היא כלי מרכזי באפיון מרחבים מטריזבילים (נסביר ביתר פירוט מדוע בשלב מאוחר יותר). ההוכחה היא פשוטה אך מתוחכמת, ותראה לנו את כוחה של אקסיומת הנורמליות.

משפט 1.3 (הלמה של אוריסון) *יהי X מ"ט נורמלי. יהיו $A, B \subseteq X$ סגורות וזרות. אזי יש פונקציה רציפה $f : X \to \mathbb{R}$ כך ש-$f|A = 0$ ו-$f|B = 1$.*

בטרם ניגש להוכחה נביא את האינטואיציה מאחוריה. המטרה שלנו היא לנצל את הנורמליות של X כדי לבנות אוסף קבוצות פתוחות מקוננות $F(t) \subseteq X$ (ל-$0 < t < 1$) כך ש-$F(t) = \{x \in X : f(x) < t\}$ לאיזו פונקציה רציפה f שתקיים את דרישותינו. ברור שאם נצליח במשימתנו, נוכל לשחזר את הפונקציה f מן הקבוצות $F(t)$. לאמיתו של דבר, אינטואיטיבית, אם $T \subseteq \mathbb{R}$ צפופה, הקבוצת $F(t)$ ל-$t \in T$ יספיקו כדי לשחזר את f. ברור שתנאי הכרחי להצלחת משימתנו הוא שאם $s < t$ אז $F(t) \subseteq F(s)$. כיוון שאנו רוצים ש-$f(A) = 0$ ו-$f(B) = 1$ ברור שלכל $0 < t < 1$ עלינו לדרוש $A \subseteq F(t) \subseteq B$. יתר על כן, אפשר להניח שתמונת הפונקציה f שנבנה צריכה להיות קטע (למשל, אם X קשיר). לכן נידרש שלכל $s < t$ מתקיים $F(t) \subsetneq F(s)$. ראשית, נראה שזה אמנם מספיק כדי לשחזר פונקציה (לא בהכרח רציפה) המקיימת את דרישותנו.

למה 1.4 *נניח ש-$T \subseteq \mathbb{R}$, לכל $t < s \in T$ מתקיים $F(t) \subsetneq F(s)$ ו-$F(1) = X$.*

נגדיר פונקציה

$$f(x) = \inf\{t \in T : x \in F(t)\}$$

אזי לכל $s \in [0,1]$ מתקיים:

$$\{x : f(x) < s\} = \bigcup_{t<s} F(t)$$

ו-

$$\{x : f(x) \leq s\} = \bigcap_{t>s} F(t)$$

הוכחה: פשוט נחשב:יתר על כן,

$$\{x : f(x) < s\} = \{x : \inf\{t \in T : x \in F(t)\} < s\} = \\ \bigcup_{t<s}\{x : \inf\{r \in T : x \in F(r)\} = t\} = \bigcup_{t<s} F(t)$$

כנדרש. הוכחת הטענה השניה כמעט זהה ונותיר אותה כתרגיל. ■

עתה עלינו לברר מהם התנאים הדרשים כדי להבטיח שהפונקציה f המתקבלת תהיה רציפה. ברור שלשם כך עלינו להניח ש-T צפופה ב-$[0,1]$. משום כך, וכיוון שאנו מניחים ש-$F(t) \subsetneq F(s)$ ל-$t < s$, יוצא שיש

$$t < r_1 < r_2 < s$$

ומתקיים

$$F(t) \subsetneq F(r_1) \subsetneq F(r_2) \subsetneq F(s)$$

ובפרט, אם f רציפה יוצא ש-$F(t) \subsetneq \overline{F(t)} \subsetneq F(s)$. נראה שאם נצליח לבצע את זממנו, ולהבטיח קיומה של תכונה זו, הפונקציה המתקבלת בלמה האחרונה היא אכן רציפה:

למה 1.5 תהי $T \subseteq R$ צפופה ונניח שלכל $t < s \in T$ מתקיים $F(t) \subsetneq \overline{F(t)} \subsetneq F(s)$ ו-$F(t)$ פתוחה לכל t ($F(1) = [0,1]$). אזי הפונקציה

$$f(x) = \inf\{t \in T : x \in F(t)\}$$

רציפה.

הוכחה: תהי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה בסיסית. עלינו להראות ש-$f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X. אנחנו יודעים ש-$U := \{x : t < x < r\}$ לאילו $t < r \in [0,1]$. מן הלמה האחרונה ברור שהקבוצה $U_r := f^{-1}((0,r))$ פתוחה. מן החלק השני של הלמה גם $f^{-1}([0,t]) = \bigcap_{s>t} F(s)$. מהנחתנו $C_s := \bigcap_{s>t} F(s) = \bigcap_{s>t} \overline{F(s)}$, שהיא סגורה. יוצא ש-$f^{-1}((t,r)) = U_r \setminus C_s$ שהיא קבוצה פתוחה, כנדרש. ■

עתה אנו מוכנים להוכיח את הלמה של אוריסון:

הוכחה: (הלמה של אוריסון) נבחר $T = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. ונבחר מניה כלשני $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ של T. נגדיר באינדוקציה קבוצות פתוחות $F(q_i)$ באופן הבא: כיוון ש-X נורמלי יש U,V פתוחות וזרות המפרידות את A,B. נגדיר $F(0) = U$ ו-$F(1) = V$. נניח שהגדרנו כבר את $F(q_i)$ לכל $i \leq n$ כך ש-$F(q_i)$ פתוחה ואם $q_j < q_i$ אז $F(q_j) \subseteq \overline{F(q_j)} \subsetneq F(q_i)$, לכל $j < n$. נראה כיצד לבחור את q_n. נבחר

$$q_{i_1} < q_{i_2} \in \{0,1\} \cup \{q_i\}_{i<n}$$

כך ש- $q_{i_1} < q_n < q_{i_2}$ כאשר q_{i_1} מירבי כנ"ל ו-q_{i_2} מזערי כנ"ל. מהנחתנו

$$F(q_{i_1}) \subseteq \overline{F(q_{i_1})} \subsetneq F(q_{i_2})$$

. בפרט $C := X \setminus F(q_{i_2})$ סגורה ו-$C \cap \overline{F(q_{i_1})} = \emptyset$. לכן מנורמליות יש פתוחה, שנקרא לה $F(q_n)$ כך ש-

$$\overline{F(q_{i_1})} \subsetneq F(q_n) \subsetneq \overline{F(q_n)} \subsetneq F(q_{i_2}).$$

עתה שתי הלמות האחרונות משלימות את הוכחת המשפט. ■

מסיבות טכניות נרצה להוכיח את משפט המטריזביליות תחת הנחות נוספות, שיקלו עלינו במעט את החיים:

הגדרה 1.6 מרחב טופולוגי יקרא **פריד** אם יש לו תת-קבוצה צפופה בת מניה. נאמר שהוא מקיים את **אקסיומת המניה השניה** אם יש לו בסיס בן מניה.

ברור שאם ל-X בסיס בן מניה אז X פריד (למה?) ראיתם כבר בתרגיל של-$\mathbb{R}$ יש בסיס בן מניה, ולכן הוא מקיים את אקסיומת המניה השניה, ומכיוון ש-$\mathbb{Q}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$ (עם הטופולוגיה הסטנדרתית) הוא גם פריד. מאותו השיקול בדיוק גם $\mathbb{R}_l$ מרחב פריד, אך ראיתם שאין לו בסיס בן מניה. כמו כן, ראינו שאם $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה (כלשהי) של מרחב X ו-$Y \subseteq X$ תת מרחב אזי $\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}$ בסיס ל-Y. לכן אם X מקיים את אקסיומת המניה השניה, כך גם כל תת מרחב שלו. הדבר אינו נכון ביחס לאקסיומת הפרידות.

<u>תרגיל</u>: נביט ב-$\mathbb{R}^2$ עם טופולוגית המכפלה מ-$\mathbb{R}_l$. אזי $\mathbb{R}$ בטופולוגיה זו פריד, אך יש לו תת מרחב שאינו פריד.

במרחבים מטרים לא תיתכן התנהגות כזו:

למה 1.7 יהי X מרחב מטרי פריד. אזי יש לו בסיס בן מניה, ולכן כל תת מרחב של X פריד.

הוכחה: תהי $Y \subseteq X$ קבוצה צפופה בת מניה. יהי $\mathbb{B} := \{B_q(y) : q \in \mathbb{Q},\, y \in Y\}$, אזי $\mathbb{B}$ בסיס בן מניה ל-X: אם $U \subseteq X$ פתוחה ו-$x \in U$ אפשר להניח בה"כ ש-U כדור פתוח ברדיוס $q \in \mathbb{Q}$ סביב x. כיוון ש-Y צפופה ב-X יש $y \in Y$ כך ש-$d(x,y) < \frac{q}{4}$. נבחר y כזה, אזי $x \in B_{\frac{q}{2}}(y) \subseteq U$, כנדרש. יוצא שכל תת מרחב שלכל תת מרחב של X יש בסיס בן מניה, ולכן כל תת מרחב של X פריד. ■

בהמשך נראה כי ניתן לאפיין את המרחבים המטרים שיש להם בסיס בן מניה. בטרם נתחיל את הדיון באפיון זה נעשה סיור קצר בתחום אקסיומות ההפרדה.

<u>תרגילים</u>:

1. מרחב האוסדורף קומפקטי הוא נורמלי.

2. הראו שלמעשה יותר מזה נכון: אם X מרחב רגולרי פריד אז X נורמלי (רמז: הראו שמכל כיסוי של X אפשר להוציא תת-כיסוי בן-מניה. עתה השתמשו בטיעון דומה לשאלה הקודמת). הסיקו שכל שתי קבוצות סגורות, חסומות וזרות ב-$\mathbb{R}^n$ ניתנות להפרדה.

1.1 מטריזביליות

בהנתן מרחב טופולוגי X נשאלת השאלה האם יש מטריקה על X אשר ביחס אליה X הוא מרחב מטרי. בפרק זה ניתן תשובה לשאלה זו תחת ההנחה הנוספת ש-X פריד. הלמה של אוריסון תמלא תפקיד מרכזי בטיעון. מן הראוי להעיר שאפיון דומה קיים גם במקרה הכללי, אך ההוכחה - שעושה שימוש ברעיונות דומים מעט מורכבת יותר, ולא תובא כאן.

הגדרה 1.8 מרחב טופולוגי X יקרא *מטריזבילי* אם קיימת מטריה d על X כך שהטופולוגיה המטרית מתלכדת עם הטופולוגיה על X.

נשים לב שגם אם X מרחב מטרי, מן הטופולוגיה על X אין לנו כל סיכוי לשחזר את המטריקה. לדוגמה, אם (X,d) מרחב מטרי אזי גם $d'(x,y)$ הנתונה ע"י

$$d'(x,y)=\begin{cases} d(x,y) & d(x,y)<1 \\ 1 & d(x,y)\geq 1 \end{cases}$$

היא מטריקה על X (מדוע?) והיא מגדירה אותה טופולוגיה על X (כי הכדורים הפתוחים ב-$d'(x,y)$ פתוחים גם ב-$d(x,y)$ ויתר על כן, מהווים בסיס לטופולוגיה זו). במילים אחרות ההעתקה $\mathrm{Id}:(X,d)\to(X.d')$ היא הומיאומורפיזם, אף על פי שהמטריקות שונות.

הדרך שלנו להוכיח שמרחב טופולוגי X הוא מטריזבילי תהיה למצוא מרחב מטרי (נאמר I^ω) והעתקה $f:X\to I^\omega$ שהיא הומיאומורפיזם על תמונתה. כתת מרחב של מרחב מטרי $f(X)$ היא בעצמה מרחב מטרי, וע"י משיכה לאחור של הכדורים הפתוחים ב-$f(X)$ נקבל מטריקה על X. כיוון ש-f הייתה הומיאומורפיזם נקבל שהמקורות של הכדורים הפתוחים ב-$f(X)$ מהווים בסיס לטופולוגיה על X, ולכן המטריקה שהגדרנו מגדירה על X את אותה הטופולוגיה ממנה התחלנו. השיטה לשיכון של X ב-I^ω היא פשוטה, אך שימושית:

הגדרה 1.9 תהי $\mathcal{F}$ משפחה של פוקציות ממרחב טופולוגי X אל מרחב טופולוגי Y.

1. נאמר ש-$\mathcal{F}$ מפרידה נקודות אם לכל $x\neq y\in X$ קיימת $f\in\mathcal{F}$ כך ש-$f(x)\neq f(y)$.

2. נאמר ש-$\mathcal{F}$ מפרידה נקודות מקבוצות סגורות אם לכל $C \subseteq X$ סגורה ונקודה $x \in X$ יש פונקציה $f \in \mathcal{F}$ כך ש-$f(x) \notin \overline{f(C)}$.

נשים לב שאם X מרחב האוסדורף (או T_1, כלומר כל נקודה ב-X סגורה) אז התנאי הראשון נובע מן השני. עתה נוכל לנסח את הלמה העיקרית החסרה למשפט המטריזביליות:

למה 1.10 תהי $\mathcal{F}$ משפחת פונקציות ממרחב טופולוגי X אל מרחב טופולוגי Y. אם $\mathcal{F}$ מפרידה נקודות ומפרידה נקודות מקבוצות סגורות אז ההעתקה $e : X \to Y^{\mathcal{F}}$ הנתונה ע"י

$$x \mapsto (f(x) : f \in \mathcal{F})$$

היא הומיאומורפיזם על תמונתה.

הוכחה: כיוון ש-$\mathcal{F}$ מפרידה נקודות ברור ש-e חח"ע. כיוון שהיא בוודאי על התמונה יספיק להוכיח ש-e פתוחה (על התמונה) ורציפה. העובדה ש-e רציפה מיידית: יספיק לוודא שהמקור של איבר בסיס למחצה פתוח. נקבע $f \in \mathcal{F}$ ו-$y \in f(X)$ ו-$U \subseteq Y$ סביבה פתוחה של y. תהי $U_{f,y} \subseteq Y^{\mathcal{F}}$ נתונה ע"י: $U \times \prod_{g \neq f} Y$, אז $e^{-1}(U_{f,y}) = f^{-1}(U)$ פתוחה. נותר, אם כן, לוודא ש-e העתקה פתוחה. תהי $V \subseteq X$ פתוחה. עלינו לוודא ש-$e(V)$ פתוחה. נסמן $C = X \setminus V$, ונבחר $x \in V$ כלשהי. אוסף האיברים y במכפלה כך ש-$y_f \notin \overline{f(C)}$ הוא פתוח וחיתוכו עם $e(X)$ חלקי ל-$e(V)$. במילים אחרות: מהנחתנו יש פונקציה $f \in F$ שמפרידה את x מ-C, כלומר $f(x) \notin \overline{f(C)}$. כלומר, אם נגדיר $U \subseteq Y^{\mathcal{F}}$ הפתוחה הבסיסית שהיא Y בכל קו-אורדינטה שונה מ-f ו-$Y \setminus \overline{f(C)}$ בקו-אורדינטה f נקבל ש-$f(x) \in U \cap e(X) \subseteq e(V) \cap e(X)$, וזה מה שהיינו מריכים להראות. ■

עתה נוכיח את משפט המטריזביליות של אוריסון:

משפט 1.11 מרחב האוסדורף רגולרי בעל בסיס בן מניה הוא מטריזבילי.

הוכחה: יהי X מרחב טופולוגי כבהנחות המשפט. ראינו כבר ש-I^{ω} הוא מרחב מטרי. כיוון שתת מרחב של מרחב מטרי גם הוא מטרי יספיק למצוא שיכון הומיאומורפי של X כתת מרחב שלI^{ω}. לפי הלמה האחרונה יספיק למצוא משפחה בת מניה של פונקציות רציפות $f : X \to I$ כך שהמשפחה מפרידה נקודות

מקבוצות סגורות (זאת כיוון שהמרחב הוא האוסדורף). כיוון של-X בסיס בן מניה ראינו ש-X פריד ולכן (כיוון שהוא גם רגולרי) X נורמלי.

יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה של X. תהי $\{(U,V)_i\}_{i\in\omega}$ מניה של כל הזוגות (U,V) של איברים ב-$\mathcal{B}$ כך ש-$\bar{U} \subseteq V$. לפי הלמה של אוריסון יש פונקציה רציפה $f : X \to I$ כך ש-$f(\bar{U}) = \{0\}$ ו-$f(X \setminus V) = \{1\}$. כיוון שזו בוודא משפחה בת מניה של פונקציות, נותר לוודא שהיא מפרידה נקודות מקבוצות סגורות. אבל זה ברור: אם $C \subseteq X$ סגורה ו-$x \notin C$ אז מרגולריות יש פתוחות בסיסיות $x \ni U \subseteq \bar{U} \subseteq V$, כך ש-$V \cap C = \emptyset$, ולכן יש פונקציה f במשפחה שלנו כך ש-$f(x) = 1$ אבל $f|X \setminus U = \{0\}$ ובפרט $f|C = 0$, כנדרש.

■