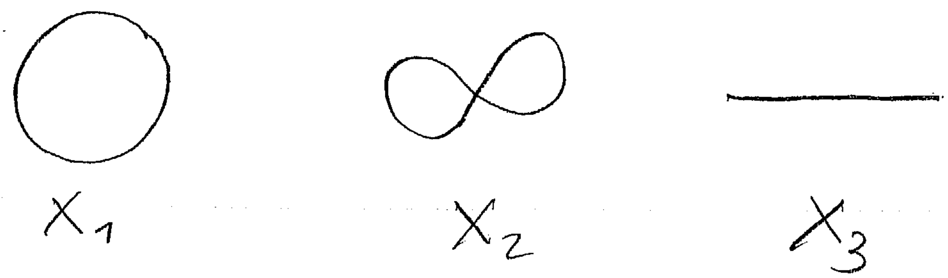
חלק א

1. אם X מ"ט קשיר ו $A\subseteq X$ קבוצה צפופה אז A קשירה.

<u>לא נכון</u>: $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ צפופה ב $\mathbb{R}$ ואינה קשירה.

2. בין שלושת המרחבים הטופולוגיים הבאים יש זוג מרחבים שהומאומורפיים זה לזה. כל שלושת המרחבים הם תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$.



X_3 הוא <u>קטע פתוח</u> (ללא קצוות).

<u>לא נכון</u>: ב X_1,X_2,X_3 הסרת כל נקודה, כל נקודה פרט לאחת ואף נקודה, מותירות את המרחב קשיר.

3. כל מרחב האוסדורף קומפקטי הוא מטריזבילי.

<u>לא נכון</u>: $[0,1]^{\mathbb{R}}$ ומרחב כל הסודרים עד ω_1 הם דוגמאות נגד.

4. מכפלה כלשהי של מרחבים דיסקרטיים היא מרחב דיסקרטי (בטופולוגיית המכפלה).

<u>לא נכון</u>: בכל סביבה פתוחה של איבר ב $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ יש אינסוף איברים, ולכן אף יחידון אינה פתוחה.

5. אם X מרחב מטרי קומפקטי ו $f:X\to X$ רציפה אז יש $x_0\in X$ כך ש $f(x_0)=x_0$.

<u>לא נכון</u>: $f=\{(0,1),(1,0)\}$ רציפה מ $\{0,1\}$ הדיסקרטי לעצמו.

חלק ב

6. תהי $\langle L, \leq \rangle$ קבוצה סדורה קווית ונניח שלכל תת-קבוצה של L יש חסם עליון מינימלי. לפי ההגדרה, החסם של $\emptyset$ הוא מינימום ב-L ואילו החסם של L הוא מקסימום ב-L. תהי τ טופ' הסדר של L.

(א) הוכיחו ש-(L,τ) מרחב האוסדורף.

(ב) הוכיחו ש (τ, L) מרחב קומפקטי.

(ג) הוכיחו שכל מרחב האוסדורף קומפקטי הוא נורמלי.

משקל כל סעיף 10 נקודות.

6א. לפשטות זה לא נוצר שמאלה $(L,\leq)$. כל מרחב סדור קווי הוא האוסדורף. אם $b>a$ ויש c כך ש $b>c>a$ אז (c,∞) $(-\infty,c)$ מפרידים את b, a ואחרת $(a,b)=\emptyset$ אז $(-\infty,b)$ (a,∞) אותן זרות.

6ב. הוכחנו זאת בכיתה עם מסננים. הוכחה נוספת:

יהי $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ כיסוי פתוח. לכל $F \subseteq I$ סופית

יהי ~~נגדיר~~ $\sup\{x\in L \mid (-\infty, x] \subseteq \bigcup_{\alpha\in F} U_\alpha\} = a_F \in L$ ויהי

$$b = \sup\{a_F \mid F \subseteq I \wedge |F| < \aleph_0\}$$

ויש איבר בכיסוי U_α כך ש $b \in U_\alpha$ ומכיוון ש U_α פתוח יש $y<b$ כך ש $(y,b] \subseteq U_\alpha$. מהגדרת b יש $F \subseteq I$ סופית כך ש $\bigcup_{\alpha\in F} U_\alpha \supseteq (-\infty, y]$ וכך סיימנו.

6 ג. לכל סגורה D ו- $x\notin D$ במרחב האוסדורף X קיימים $U_y,V_y\in\tau$ לכל $y\in D$ כך ש $x\in U_y$ $y\in V_y$ ו- $U_y\cap V_y=\phi$
ואז יש תת-כיסוי סופי של D מקבוצות, שאיחוד האוסף הסופי של ה- V_y-ים וחיתוך מספר סופי של פתוחות U_y-ים מפרידים את x מ D. עד כאן רגולריות.
חזרה על שגיאה דומה מהשאלה הקודמת.

7. יהי $\mathcal{B}$ אוסף כל הקטעים $[a,b)=\{x\mid a\le x<b\}$ עבור $a<b$ ממשיים.

(א) הוכיחו ש- $\mathcal{B}$ הוא בסיס לטופולוגיה τ שמעדנת את הטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}$.

(ב) הוכיחו של- τ אין בסיס בן-מניה. (אין קשר לבסיס $\mathcal{B}$)

(ג) הוכיחו ש $(\mathbb{R},\tau)$ ספרבילי.

<u>משקל כל סעיף 10 נקודות</u>

7 א' חיתוך שני קטעים מהצורה $[a,b)$ הוא קטע מאותה צורה ($[a,a)=\phi$). כמו כן כל $r\in\mathbb{R}$ שייך ל $[r,r+1)$. לכן $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה τ. אם $a<b$ ב $\mathbb{R}$ אז $\bigcup_{a'\in(a,b)}[a',b)=(a,b)$

ולכן כל קטע פתוח (a,b) שייך ל- τ. מכיוון שכל פתוחה ב- $\mathbb{R}$ היא איחוד קטעים פתוחים, τ מעדנת את הטופ'

הממשית הרגילה.

<u>7ב:</u> לכל $r\in\mathbb{R}$ הקטע $[r,r+1)$ פתוח. לכן, אם B בסיס כלשהו, ~~[illegible]~~ (לאו דווקא כפי שהגדרנו את ה- קבוצה שלו) אז לכל r יש $u\in B$ כך ש $r\in u\subseteq[r,r+1)$. זה אומר ש $r=\min u$. כך הראנו שלכל $r\in\mathbb{R}$ יש $u\in B$ כך ש מינימום $r=\min u$ ולכן $|\mathbb{R}|\le|B|$.

<u>7ג:</u> $\mathbb{Q}$ בת מניה וצפופה בטופ׳ הזאת כי לכל $[a,b)$ עם $a<b$ יש $q\in\mathbb{Q}$ $a<q<b$.

הישר עם הטופולוגיה הזו הוא דוגמא למרחב ליניאלוף (הוכיחו!) שמכפלתו עם עצמו איננו ליניאלוף (הוכיחו ש ~~[illegible]~~

$$\{\langle x,y\rangle \mid x+y=1\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

קבוצה דיסקרטית ב $\mathbb{R}^2$ עם טופ׳ המכפלה.)

8. נתון מרחב X שאינו קומפקטי. נניח ש X האוסדורף ונניח ש X קומפקטי מקומית

כלומר שלכל $x\in X$ יש קבוצה קומפקטית $D\subseteq X$ כך ש $x\in \operatorname{int} D$. תהי $y\notin X$ נקודה נוספת ונגדיר טופולוגיה τ על $Y=X\cup\{y\}$ ע"י הוספת כל הקבוצות מהצורה $(X\setminus D)\cup\{y\}$ לטופולוגיה המקורית עבור $D\subseteq X$ קומפקטית.

(א) הוכיחו ש Y מרחב האוסדורף.

(ב) הוכיחו ש-Y קומפקטי.

(ג) הוכיחו שכל מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית הוא רגולרי.

8 א' אם $U=\bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha$ איחוד כלשהו של פתוחות ב X עם $(X\setminus D)\cup\{y\}$ _ D קומפקטית, אז $X\cap U$ פתוחה ב X. ההיפך ברור. לכן X אכן תת-מרחב של Y.

אם $x,x'\in X$ נפרדים על ידי זוג קבוצות פתוחות מ τ_X. אם y נפריד מ $x\in X$ על ידי $\operatorname{int} D$ ו $(X\setminus D)\cup\{y\}$ עבור סביבה קומפקטית D של x.

8 ב: אם $\{U_\alpha : \alpha\in I\}$ כיסוי פתוח של Y

אז יש $\alpha_0\in I$ כך ש $y\in U_{\alpha_0}$. לכן יש $X\supseteq D$ קומפקטית כך ש $X\setminus D\subseteq U_{\alpha_0}$. [כאן שכחו רבים בבחינה ש U_{α_0} עצמה מהצורה הזו; לא הפחתתי בניקוד על כך]. עם $\{U_\alpha\cap X : \alpha\in I\}$ קיבלנו כיסוי פתוח של D ולכן יש תת-כיסוי סופי וסיימנו.

הערה נוספת: אם F על-מסנן של Y ולכל $D\subseteq X$ קומפקטית $D\notin F$ אז F מתכנס ל-Y. אחרת, יש $D\subseteq X$ קומפקטית כך ש $D\in F$ ואז $F\cap P(D)$ על-מסנן של D ומקומפקטיות D מתכנס.

8 ג: אם X קומפקטי מקומית והאוסדורף, וכן Y כמו ב-א+ב ולכן ש-Y האוסדורף קומפקטי, לכן נורמלי, ולכן רגולרי, ויש-X תת-מרחב של Y, ולכן רגולרי.

הערה נוספת: אם $E\subseteq X$, $x\notin E$, E סגורה, נמצא סביבה קומפקטית $x\in D$ ואז $E\cap D$ סגורה ב-D. בתוך D נפריד את x מ-$E\cap D$ על ידי U,V בהתאמה, ואז $U\cap \mathrm{int}\, D$; $X\setminus E\cup V$ מפרידים.