מבוא לטופולוגיה - תרגיל 1

1. תהי X קבוצה ו-$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X. נאמר ש-$\mathcal{T}_1$ מעדנת את $\mathcal{T}_2$ אם $U \in \mathcal{T}_2$ גורר ש-$U \in \mathcal{T}_1$.

   (א) הראו שיחס העידון הוא סדר חלקי על אוסף הטופולוגיות על קבוצה X. הראו שלסדר חלקי זה איבר מזערי ואיבר מירבי.

   (ב) מצאו את כל הטופולוגיות השונות על קבוצה בת שלושה איברים $\{a, b, c\}$ וסדרו אותן על פי יחס העידון.

   (ג) הראו ש-$\mathcal{T}_1$ מעדנת את $\mathcal{T}_2$ אם ורק אם לכל $U \in \mathcal{T}_2$ ולכל $x \in U$ יש $V \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ כך ש-$x \in V$ ו-$V \subseteq U$.

   (ד) מצאו דוגמה לטופולוגיות $\mathcal{T}_1$ ו-$\mathcal{T}_2$ על קבוצה כלשהי X כך שלכל $U \in \mathcal{T}_2$ קיים $V \in \mathcal{T}_1$ כך ש-$V \subseteq U$, אבל $\mathcal{T}_1$ אינה מעדנת את $\mathcal{T}_2$.

2. נזכיר כי סדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ במרחב פסאודו מטרי (X, d) היא סדרת קושי אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$d(a_n, a_m) < \epsilon$ לכל $N < n < m$. יהי (X, d) מרחב מטרי ו-$\mathcal{X}$ אוסף כל סדרות קושי ב-X. נגדיר

$$D : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

ע"י:

$$D(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n).$$

   (א) הראו ש-D היא פסאודו-מטריקה על $\mathcal{X}$ (ובפרט מוגדרת על כל $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ - כלומר, שהגבול הנ"ל תמיד קיים) אך איננה מטריקה.

   (ב) נגדיר העתקה

$$\iota : X \to \mathcal{X}$$

   ע"י $x \mapsto (x, x, x \ldots)$. הראו ש-$\iota$ היא איזומטריה, כלומר

$$d(x, y) = D(\iota(x), \iota(y))$$

   לכל $x, y \in X$, וכי $\iota(X)$ צפופה ב-$(\mathcal{X}, D)$.

   (ג) הראו שלכל סדרת קושי ב-$\mathcal{X}$ יש גבול ב-$\mathcal{X}$ (ביחס לטופולוגיה הפסאודו-מטרית). רמז: אם $(A_1, A_2, \ldots)$ סדרת קושי ב-$\mathcal{X}$ ו-$A_i = \{a_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ מצאו סדרה $A := \{a_{i,j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ כך ש-$a_{i,j_i} \in A_i$, ו-$D(A_n, A) < \frac{1}{2^n}$ לכל n מספיק גדול.

3. יהי $\mathcal{N}$ אוסף כל הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים. ל-$\eta \in \mathcal{N}$ נסמן $\eta(n)$ את האיבר ה-n ב-η. נגדיר

$$d(\eta_1, \eta_2) = 2^{-\min_n\{\eta_1(n)\neq\eta_2(n)\}}$$

(ואם $\eta_1 = \eta_2$ אז $d(\eta_1, \eta_2) = 0$)

4. .

(א) הראו כי d היא מטריקה על $\mathcal{N}$.

(ב) מהן כל סדרות קושי ב-$(\mathcal{N}, d)$?

(ג) לכל $\epsilon > 0$ תארו את הכדור ברדיוס ϵ סביב $(1, 1, 1, \dots)$.

5. תהי X קבוצה כלשהי. מסנן $\mathcal{U}$ על X זה אוסף של תת קבוצות של X המקיים:

- $X \in \mathcal{U}$ ו-$\emptyset \notin \mathcal{U}$.
- אם $U \in \mathcal{U}$ ו-$V \supseteq U$ אז גם $V \in \mathcal{U}$.
- אם $U \in \mathcal{U}$ ו-$V \in \mathcal{U}$ אז גם $U \cap V \in \mathcal{U}$.
- אם בנוסף $\mathcal{U}$ מירבי בעל התכונות הללו נאמר שהוא על מסנן.

(א) הראו שלכל $a \in X$ האוסף

$$\mathcal{U}_a := \{U \subseteq X : a \in U\}$$

הוא על-מסנן על X. על מסנן מהצורה $\mathcal{U}_a$ נקרא ראשי.

(ב) אם X קבוצה סופית כל על-מסנן $\mathcal{U}$ על X הוא ראשי, כלומר יש $a \in X$ כך ש-$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a$. האם גם כל מסנן על X הוא ראשי?

(ג) אם $\mathcal{U}$ מסנן על X אז לכל $U \subseteq X$ או ש-$\mathcal{U} \cup \{U\}$ או ש-$\mathcal{U} \cup \{X \setminus U\}$ מוכלות במסנן על X.

(ד) מסנן $\mathcal{U}$ הוא על מסנן אם ורק אם לכל $U \subseteq X$ או ש-$U \in \mathcal{U}$ או ש-$X \setminus U \in \mathcal{U}$.

(ה) אם X קבוצה אינסופית אז אוסף כל הקבוצות $U \subseteq X$ כך ש-$X \setminus U$ סופית הוא מסנן, אבל אינו על מסנן.