אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

המחלקה למתמטיקה ומדעי המחשב

פתרון מבחן בגיאומטריה חישובית

מספר נבחן _____

תאריך הבחינה 26/1/2000
שם המרצה דר' קלרה קדם
שם הקורס גיאומטריה חישובית
מס' הקורס 201.2.4361
שנה תש"ס סמ' חורף מועד א
משך הבחינה שעתיים וחצי
חומר עזר מחשבון בלבד

יש לענות על 4 שאלות לפי המצויין בטופס (אחת מכל שתיים)
אין צורך להתייחס למצבים מנוונים.

חלק א 25% ענה על אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. נתונים 2 מצולעים קמורים P ו- Q עם M ו- N צלעות בהתאמה. תאר אלגוריתם שמחשב את הקמור של איחוד המצולעים בזמן O(M+N).

נמצא את ציאצאות הנוצאלים של שני המצולעים (צאן מיצוג O(M+N). נתחיל מהקשת המתאימה לקדקד הקיצוני שמאלי מבין קדקדי שני המצולעים (נמצא אותה במעבר פשוט על O(M+N). הקדקדים). נניח שהקדקד הקיצוני של P. לכל צוג קשתות נחתכות של הציאצומה (באחת מ-P והשנייה מ-Q) – נחפה את הקדקדים המתאימים להם בקו. אם הנוצאל לקו (צאן חישוב (1) O) שייך לנוצאל בתחום החיתוך של הקשתות אז הקו שייך לקמור. ואת נמשיך באותו כוון של המצולע השני. אם לא - נמשיך על הצלע הקיצונית לקדקד הבא באותו מצולע ובאותו הכיוון.

2. נתונה קבוצה S בת n נקודות במישור, הממוינות מיון מעגלי סביב נקודה X כלשהי (לא מ-S). תאר אלגוריתם שמחשב את הקמור של S בזמן O(n).

מחשבים לפי אלגוריתם צרהם. אבל יש להתייחס לנקודה הראשונה במיוחד. מוצאים תחילה את הנקודה הקיצונית שמאלית S_L של S. נניח שצאת הנקודה ה I –ית ב S המאוינת היא בוצאי של הקמור. נתחיל ממנה באופן זיקלי על S המאוינת מצלעית מכניסים את S_L לממסנית סכשיו מכניסים גם את הנקודה ה – I+1 לממסנית ומשיכים הלאה לפי סדר המיון סצ סוף הנקודות: כצ"ל : בודקים את הנקודה הבאה אם הפנייה ימינה – מסיפים את הנקודה שהיתה קודם בראש הממסנית (אבל תמיד משאירים את הנקודה S_L בממסנית) וזוחפים את החשה. ובפנייה שמאלה – מוסיפים את הנקודה החשה לממסנית. כאשר מגיעים המיון הם מצלי לסוף חוזרים על התהליך אבל בכיוון הפוך ב-S וגם הופכים ימין לשמאל ו שמאל לימין באלגוריתם לסיל. את התוצאות שמים בממסנית אחרת. צאן הפיכה מוסבה בכך שכל נקודה מוכנסת לממסנית (או גם מוכנסת וגם מוסרת) לכל היותה פ סמ"ית. אם X לסיל היתה בתוך הקמור של S אז רק צוגים שהנקודה הראשונה תהיה על הקמור וגרהם כצ"ל. אבל אם X היתה מחוץ לקמור אז החזרה על האלגוריתם חיונית למציאת שני חלקי הקמור, צה שחוק מ-X וצה שקרוב אליה.

חלק ב 25% ענה על אחת מבין שתי השאלות הבאות.

3. נתונים N מעגלים במישור ע"י מיקום מרכזיהם ורדיוסיהם. יש לתאר אלגוריתם שמוצא בזמן O(N log N) אם קיים זוג מעגלים נחתכים ולנמק את זמן הריצה

נשמח לדיאגרמת זרימה של מבניו המצלים. הסערה היא שאם שני מצלים P ו Q נתקלים אך קיים מצל שכן לאחד של P (כלומר שיש בין האחד שלו לבין האחד של P קלע זרימה) שעם נתנק איתו. כמת נסבה על כל קלעות זרימה נוכדק האם המרחקים בין קצות האחדים המצדידים אותן קטנים מסכום רדיוסי המצלים שלהם. נאני ויקה: בניית הדיאגרמה O(N log N) , מסבה על O(N) הקלעות ובדיקת המרחק O(N).

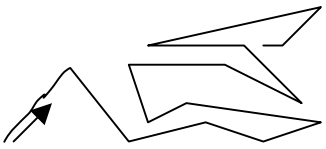
4. א. יש לתאר כיצד נראה קמור של N עיגולי יחידה במישור. אפשר ע"י ציור.
אוסף של קשתות (לכל היותר אחת מכל טיגול יחידה) המחוברות ס"י קצרים ישרים המשיקים לכל קצ קשתות סאוכות (ראו סרטוט 3).

ב. יש לנמק מדוע סבוכיות הקמור היא O(N). כלומר, שמספר הקדקדים על השפה הוא O(N).
מספר הקלעות על הקאוד של קבוצת המרכזים הוא לכל היותר N ובגלל שבין כל שתי קשתות סאוכות יש רק קצ משיק אחד.

ג. יש לתאר אלגוריתם המחשב את הקמור בזמן O(N log N).
נשמב את הקאוד של קבוצת מרכזי המצלים. אלה הם המצלים שקשתותיהם מופיעות על הקאוד. נאן הויקה לקאוד הוא O(N log N). מחשבים את המשיקים לקצות המצלים שמרכזיהם שכנים בקאוד ב O(1) נאן לכל קצ שכנים. חישוב הקאוד למרכזים נשמב בנאן O(N log N) והשאר בנאן O(N).

<u>חלק ג 25% ענה על אחת מבין שתי השאלות הבאות.</u>

5. קו פוליגונלי נקרא מונוטוני בכיוון X אם קו אנכי דרך כל X בתחום הקו חותך את הקו פעם אחת (נקרא גם פונקציה ליניארית למקוטעין). יהא P קו מונוטוני בכיוון X בעל M נקודות, ויהא Q קו פוליגונלי שאינו חותך את עצמו, שיש לו N קדקדים ו- K פניות שמאלה (שבהן כוון הקו משתנה מכיוון X גדל לכיוון X קטן). מה מספר נקודות החיתוך בין P ל- Q כפונקציה של N,K,M? נמק והראה דוגמא שבה מספר זה מושג.

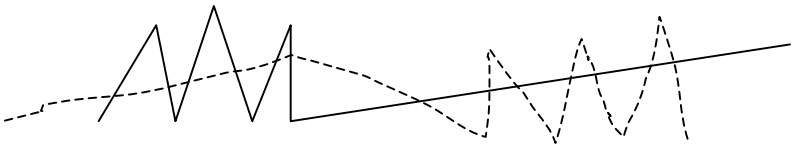


ל-Q בציור יש K=3 פניות שמאלה

נניח שאתנו יודעים שמספר נקודות החיתוך של שני קוים מונוטוניים, אחד בן X קדקדים והשני בן Y קדקדים הוא O(X+Y) (ראו תשובה לתרגיל הבא). ל-Q יש K פניות כאמור. ל-Q אינו חותך את עצמו – לכן הוא מורכב מ K+1 חתיכות מונוטוניות שלהן יש $M_1,M_2,..$ M_{K+1} קדקדים וסכומם הוא M+K. בגלל הנאמר במשפט הראשון מספר נקודות החיתוך בין חתיכה אחת i של Q לבין P הוא O(N+Mi) . ואם נסכם על K+1 החתיכות נקבל O((K+1)N + (M+K))

6. קו פוליגונלי נקרא מונוטוני בכיוון X אם קו אנכי דרך כל X בתחום הקו חותך את הקו פעם אחת (נקרא גם פונקציה ליניארית למקוטעין). יהיו P ו- Q שני קוים מונוטונים בכיוון X שלהם יש M ו- N נקודות בהתאמה.

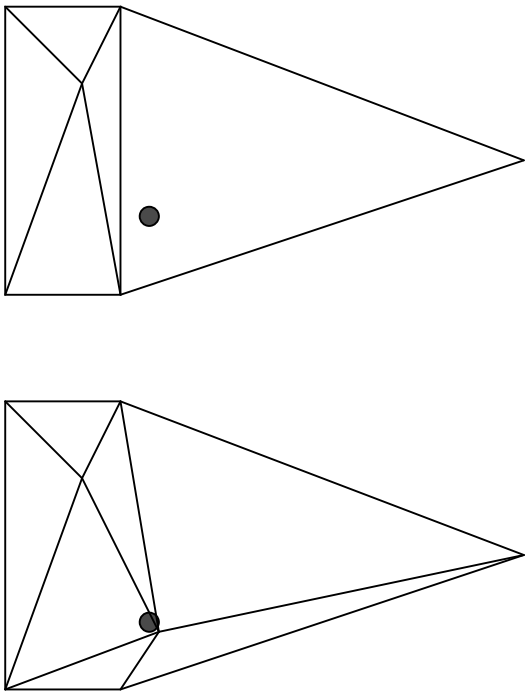
א. יש לצייר דוגמא שמספר נקודות החיתוך בה הוא O(M+N).



ב. יש לתאר אלגוריתם ליניארי ב M+N המחשב את נקודות החיתוך.
נמצא את קדקדי P ו Q לפי סדר X שלהם. נשמב חיתוך קם בין קצ א P וקצ א Q שתחום ה X שלהם חופף. חישוב חיתוך O(1) ונאן המיזוג (ועל כן מספר חישובי החיתוך הוא ליניארי ב M+N.

<u>חלק ד 25% ענה על אחת מבין שתי השאלות הבאות.</u>

7 על N פסי רכבת מקבילים זה לזה נוסעות N רכבות. לכל אחת מהירות קבועה,V1,V2,…,VN . בזמן t=0 כל רכבת עומדת במקום ידוע, K1, K2,…,KN. יש לתאר אלגוריתם שמוצא, בזמן O(N log N), את כל הרכבות שמובילות (מקדימות את השאר) בזמן כלשהו.

*הפקידון כאן הוא להצדיק מצאי מישור Y > Ki + Vi*X, כאשר X הוא הציון ו- Y הוא אורך הדיוק. ולחשב מיהן הרכבות שהקווים שלהן נמצאים על שפת חיתוך מצאי המישור. מישור חיתוך מצאי המישור נקשה בציון* O(N log N). ראו בחומר על LP מהשיעור.

8 א. תאר בקצרה ובמדויק את מבני הנתונים שמשתמשים בהם לחישוב טריאנגולית דלונייי.
ב. כיצד תשתנה הטריאנגולציה הבאה (בציור) אם נוסיף את הנקודה שבתוך המשולש הגדול ?