פיתרון מועד א', תשע"ח
פברואר 2018

1) יש שלושה סטטוסים של קודקודים, MIS, NOTMIS, Undecided.

קודקוד v שב-MIS, בודק שאין לו שכן ב-MIS. אם יש, שניהם הופכים ל-Undecided.

קודקוד v שבסטטוס NOTMIS, אם אין לו שכן ב-MIS, הופך ל-Undecided.

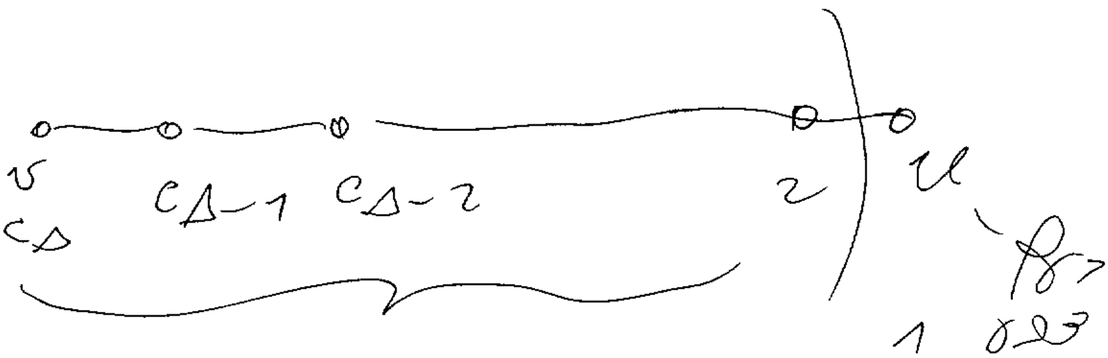
קודקוד שבצבע שלו מינימלי לוקלית מבין שכניו שהם Undecided, מצטרף ל-MIS.

נכונות: קודקודים שמצטרפים ל-MIS, מרכיבים קבוצה בת"ל (בגלל תנאי המינימליות הלוקלית). כמו כן $c\Delta$ סיבובים אחרי התייצבות הצביעה, כל הקודקודים בעלי סטטוס MIS מרכיבים MIS. (אפשר להוכיח זאת באינדוקציה על i, ש-$i=1,2,\ldots,c\Delta$, סיבובים אחרי התייצבות הצביעה כל הקודקודים בעלי צבע $1,2,\ldots,i$ בעלי סטטוס MIS מרכיבים MIS עבור כל הקודקודים בעלי סטטוס $(1,2,\ldots,i)$

$O(\Delta + \log^* n)$ — QTIME

$C\Delta \approx$ QRad

אכן $C\Delta-2$ לא מספיק כי היריב יכול להחליט קודקוד שבמרחק $C\Delta-1$ מקודקוד v, ולגרום ל-u לא להיות ב MIS, להיות Undecided, אך בצבע 1



ואז כל קודקוד הבררית לא מצטרפים ל MIS, ומחכים ל-u שיחליט על הסטטוס שלו.

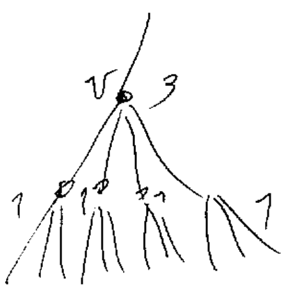
יתכן עם צבע עם כדור בגודל רדיוס $C\Delta-1$ סביב v הוא 'נ'ב', אז אחרי זמן התייצבות הצביעה אפשר להגדיר אוריינטציה מצבע גדול יותר לצבע קטן יותר.

עומק באוריינטציה הוא $\geq C\Delta-1$.

באינדוקציה על גובה של קודקוד v באוריינטציה, אפשר להראות שהוא מתעלם בזמן שהוא פרופורציוני לגובה שלו באוריינטציה.

נשים לב שהאינווריאנטה נכונה
כי במסלול שמתחילות ב-s לא יוצאות
מהרכיב בריבוע $C_{\Delta-1}$ סביב v.

2. האלג' כמתואר בכיתה. מתחילים ב C_V
עם 3-צביעה של קודקודים. עושים ShiftDown.
ואז במקביל קודקודים בעלי צבע 1
צובעים את הצלעות שיורדות מהם
ב $\Delta+1, \ldots, 2\Delta$ (פרט אולי לצלע אחת
שיורדת מהשורש, אם דרגתו היא Δ)
וקודקודים בעלי צבע 2 צובעים את
הצלעות היורדות מהם ב $2\Delta+1, \ldots, 3\Delta$
(פרט אולי לצלע אחת שיורדת מהשורש,
אם דרגתו Δ: צלע כזאת עוד לא
נצבעה). אחר קודקודים בעלי צבע 3
במקביל צובעים את הצלעות שיורדות מהם.
קוד' v כזה יודע את הצבע של הצלע שמחברת
אותו אל אביו
וגם יודע את



הצבעים של הבנים
שלו, ומכאן יודע מה הם הצבעים של הצלעות
שיורדות מבניו. ולכן מאפשר לו להשלים את
הצביעה בלי שיהיו הופעות כפולות.
גם את הצלע החסרה. של השורש ניתן לצבוע
v צובע בצורה הבאה.

עבור גרף כללי: מחלקים אותו ליערות
$F_1, F_2, \ldots, F_\Delta$
וצובעים כל יער ב-$(2\Delta-1)$ צבעים
שונים ב-$\log^* n + O(1)$ זמן כמתואר לעיל.
סה"כ מתקבלת $O(\Delta^2)$-צביעה
בזמן זה.

3. בוחרים ראשוני q, $11\Delta < q$,
ומסתכלים על פולינומים מעל $GF(q)$ בעלי
דרגה 11. יש q^{12} כאלה פולינומים,
ולכן מס' הצבעים התחילי הוא
$(c\Delta)^{12}$, כאשר $11 < c \leq 22$.
כל זוג פולינומים כזה נחתך בכל היותר 11 נקודות,
ולכן יש נקודה שבה פולינום נתון לא
חותך אף Δ פולינומים אחרים.
זה יהיה הצבע החדש. הצבע הוא בטווח $\leq q^2$,
דהיינו $\leq 22^2 \cdot \Delta^2 = O(\Delta^2)$, כנדרש.

4) יהיו a, b זוג אנטיפודלי. נניח בה"כ
שהוא יחיד. (אם זה לא המצב, נגדיל ב $\varepsilon > 0$
קטן כרצוננו את אורכי הצלעות שמחברות את
a עם שכנו היחיד בעץ ואת b עם שכנו
היחיד בעץ. [נקל לוודא ש-a ; b חייבים להיות
עלים] שינוי זה יגדיל את המרחק בין a ו b
ב 2ε, בעוד שמרחקים אחרים או לא יגדלו,
או יגדלו ב ε, ועם שאר הזוגות האנטיפודליים
המרחק ביניהם כבר לא יביא שוב למרחק
בין a ו b.)
נבחר עתה קודקוד $v \in V$
$\underset{y}{\arg\max}\, d_T(v,y) \in \{a,b\}$.
זה יוכיח שחיפוש מקודקוד v לעומק יעלה
בידינו את אחת משתי הקצוות של הזוג
האנטיפודלי.

תהי $\Pi(a,b)$ המסילה בין a ו-b בעץ.

<u>מקרה 1:</u> $v \in \Pi(a,b)$

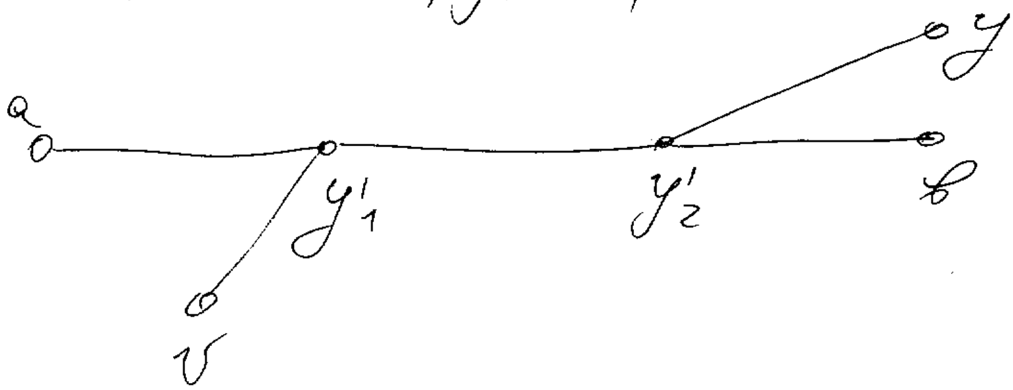
המסילה $\Pi(v,y)$ חותכת את $\Pi(a,b)$ בקטע מסוים (אולי ריק) y'–v, ואז מתפצלת ממנו. בה"כ נניח ש-v מופיע ~~בסמוך~~ במסילה $\Pi(a,b)$ לפני y' (כשמסתכלים מ-a לכיוון b).

$$d_T(v,y) = d_T(v,y') + d_T(y',y) \geq$$
$$\geq d_T(v,y') + d_T(y',b) =$$
$$= d_T(v,b)$$
$$\Rightarrow d_T(a,y) = d_T(a,v) + d_T(v,y) \geq$$
$$\geq d_T(a,v) + d_T(v,b) = d_T(a,b),$$

אך זאת סתירה לעובדה שהזוג האופטימלי הוא a,b. (הנ"ל, הזוג a,y לפחות טוב ממש.)

מקרה 2: $v \notin \pi(a,b)$

מקרה 2.1: $\pi(a,b) \cap \pi(v,y) \neq \phi$



יהי $\pi(y_1', y_2')$ סימון החיתוך של שני המסילות. בה"כ y_1', y_2' מופיעים בסדר הזה גם ב $\pi(a,b)$ וגם ב $\pi(v,y)$.

שוב

$$d_T(y_1', y) \geq d_T(y_1', b)$$

(כי אחרת $d_T(v,y) \not\geq d_T(v,b)$).

אבל אז נקבל

$$d_T(a,y) = d_T(a,y_1') + d_T(y_1',y) \geq$$

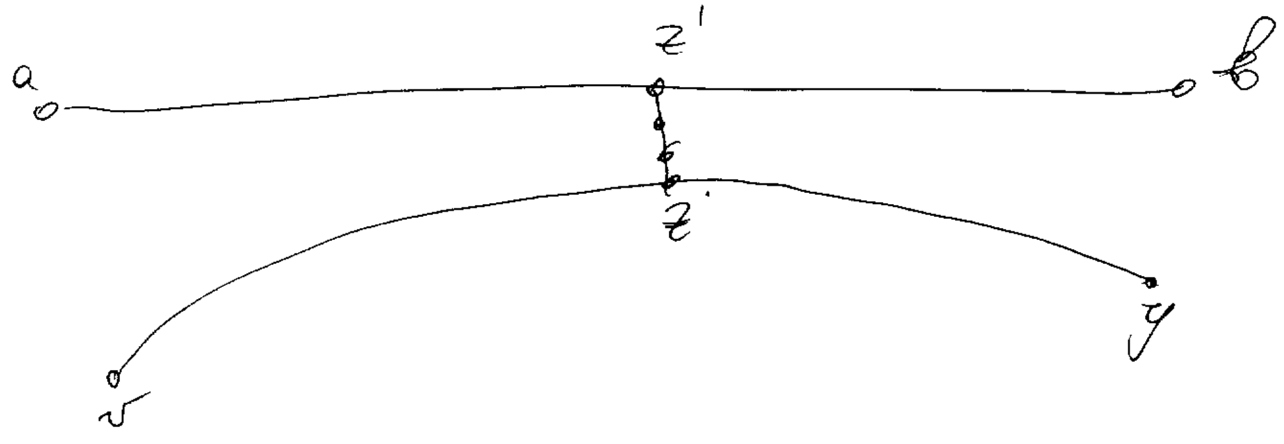
$$\geq d_T(a,y_1') + d_T(y_1',b) =$$

$$= d_T(a,b),$$

סתירה!

מקרה 2.2

$\pi(a,b) \cap \pi(v,y) = \phi$



שני המסלולים הן מסלולים זרים בעץ. ולכן
יש מסלול z-ל z' בעץ, ($z' \in V(\pi(a,b))$,
($z \in \pi(v,y)$) שהוא לכן בצלעות, ומחברת אותן
זו אל זה.

$$d_T(v,b) = d_T(v,z) + d_T(z,z') + d_T(z',b) \le$$
$$\le d_T(v,z) + d_T(z,y) = d_T(v,y)$$
$$\Rightarrow d_T(z,y) \ge d_T(z,z') + d_T(z',b)$$
$$\Rightarrow d_T(a,y) = d_T(a,z') + d_T(z',z) + d_T(z,y) \ge$$
$$\ge d_T(a,z') + d_T(z',z) + \underline{d_T(z,z') + d_T(z',b)} =$$
$$= d_T(a,b) + 2d_T(z',z) \ge d_T(a,b),$$

סתירה ליחידות של הבנה האולטרמטרי a,b.

מש"ל