פיתרון תרגיל #3

1) נציב $\sqrt{\Delta}=k$ ונחשב $\sqrt{\Delta}$-צביעה,
$\sqrt{\Delta}$-פגומה. בכ"א מתתי-גרפים רקורסיבית
נחשב (רקורסיבית) (במקביל) $(\sqrt{\Delta}+1)$-צביעה.
נמצא את הצביעה ל $(\sqrt{\Delta}+\Delta)$-צביעה.
תוך $\sqrt{\Delta}$ זמן נוסף נגיע ל-$(\Delta+1)$-צביעה.

$$f(\Delta)=f(\sqrt{\Delta})+\sqrt{\Delta}=f(\Delta^{1/4})+\Delta^{1/2}+\Delta^{1/4}=$$

$$=\ldots=O(\sqrt{\Delta})$$

ולכן הזמן הכולל הוא $O(\sqrt{\Delta})+\log^* n$.

2) כל קודקוד ע מגריל בצורה אחידה
ובת"ל צבע מתוך $\left[\frac{\Delta}{\log n}\right]$.
התוחלת הפגם היא $\log n$.
(כי יש Δ מ"מ אינדיקטורים $X_1, \dots, X_\Delta$,
כל אחד מתייחס לשכן אחר של קודקוד
נתון ע שקבענו מראש.
כל משתנה מקבל 1 בהסתברות $\frac{\log n}{\Delta}$ -
הוא מקבל 1 אם אותו שכן מקבל את
אותו הצבע כמו ע, ואחרת 0.)

$$X = \sum_{i=1}^{\Delta} X_i$$

$$\mathbb{P}(X \geq 10\log n) = \binom{\Delta}{10\log n}\left(\frac{\log n}{\Delta}\right)^{10\log n} \leq$$

$$\leq \left(\frac{e\Delta}{10\log n}\right)^{10\log n} \cdot \frac{(\log n)^{10\log n}}{\Delta^{10\log n}} =$$

$$= \left(\frac{e}{10}\right)^{10\log n} \leq \frac{1}{n^{10}}.$$

לכן ההסתברות שלאחד הקודקודים הפגם
עולה על $10\log n$ היא $\leq \frac{1}{n^9}$ (לפי חסם איחוד).
לכן בהסתברות גבוהה האלג' מוצא צביעה פגומה
סבירה.

3) גם כאן מתחילים מצביעה היפר-חזקה
עם $O(\Delta^2)$-צבעים שמחשבים אותה
תוך $\log^* n + O(1)$ זמן.

- אנו רוצים מערכת קבוצות

$$S_1, S_2, \ldots, S_m$$

כך שלכל קב' S_0 ולכל Δ שלשות

$$\{S_1^1, S_2^1, S_3^1\}, \ldots, \{S_1^\Delta, S_2^\Delta, S_3^\Delta\}$$

מתוך האוסף יתקיים ש

$$S_0 \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\Delta} (S_1^i \cap S_2^i \cap S_3^i)$$

כל איבר מוגרל לכל קב' בהסתברות p
(בבחירה כזו מתקבל קב' בסיס בגודל
$O(\Delta^{4/3} \cdot \log \Delta)$)

$$\mathbb{P}(h \in S_0) = p,$$

$$\mathbb{P}(h \notin S_1^1 \text{ or } h \notin S_2^1 \text{ or } h \notin S_3^1) = 1 - p^3$$

אפשר גם להראות ש(הטיעון כאן הוא
סקיצה כמו שעשינו בשאלה) ש

$$\mathbb{P}\Big(h \in S_0,\ h \notin \bigcup_{i=1}^{\Delta} (S_1^i \cap S_2^i \cap S_3^i)\Big) \geq$$

$$\geq p(1-p^3)^\Delta.$$

נציב $\rho = \frac{1}{\Delta^{1/3}}$ ונקבל

$$\mathbb{P}\Big(h \in S_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\Delta} (S_1^i \cap S_2^i \cap S_3^i)\Big) \geq \frac{1}{4\Delta^{1/3}}$$

ולכן

$$\mathbb{P}\Big(h \notin S_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\Delta} (S_1^i \cap S_2^i \cap S_3^i)\Big) \leq 1 - \frac{1}{4\Delta^{1/3}}$$

ולכן ההסתברות ש

$$\mathbb{P}\Big(\forall h,\ h \notin S_0 \setminus \bigcup (S_1^i \cap S_2^i \cap S_3^i)\Big) \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{4\Delta^{1/3}}\right)^{c\cdot\Delta^{4/3}\cdot\log\Delta} \leq e^{-c\Delta\log\Delta} \approx$$

$$\approx \Delta^{-c\log\Delta}$$

מס' האפשרויות לבחור את הקב' ~~The~~

הסופ' ע"י

$$\left(c\Delta^{4/3}\cdot\log\Delta\right)^{3\Delta+1}$$

ולכן ההסתברות שעבור איזשהן קב'

$S_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\Delta} (S_1^i \cap S_2^i \cap S_3^i)$ היא, לפי חסם איחוד,

$$\leq \Delta^{\frac{4}{3}\cdot\log\Delta\cdot(3\Delta+1)(1+o(1))}\cdot\Delta^{-c\log\Delta} < 1,$$

כנדרש.

מ.ש.ל.