1) (פיתרון תרגיל #1 סמס' ב) $degen1(G) \leq degen2(G)$

נוכיח:

יהי π סדור כך ש $\Delta_\pi = degen1(G)$.

נבנה סידור אחר π' באופן הבא:

אם קיים קודקוד v בעל דרגה $< \Delta_\pi$, נמחק אותו ונחזור על התהליך.

אם התהליך הזה כיסה את כל הגרף אזי קיבלנו סידור π', כך ש $\Delta_{\pi'} < \Delta_\pi$, סתירה למינימליות של Δ_π.

אחרת התהליך נעצר כאשר יש לנו תת קבוצה לא ריקה $\phi \neq U \subseteq V$ של קודקודים כך שלכל $u \in U$, $deg_U(u) \geq \Delta_\pi$.

$$\Rightarrow \delta(G(U)) \geq \Delta_\pi$$

$$degen2(G) = \max_{U' \subseteq V} \delta(G(U')) \geq \delta(G(U)) \geq \Delta_\pi = degen1(G).$$

מ.ש.ל.!! ש"ח!

$degen2(G) \le degen1(G)$

הוכחה: תהי U קב' כלשהי כך ש

$degen2(G) = \delta(G(U))$,

ויהי π סידור כלשהו. יהי $u \in U$

הקודקוד הראשון של U שמופיע ב-π.

דרגתו ימינה היא $\ge$ $\delta(G(U))$.

לכן $\Delta_\pi \ge \delta(G(U))$. לכן

$degen1(G) \ge \delta(G(U)) = degen2(G)$. ☐

עתה נראה $degen1(G) \le degen3(G)$.

הוכחה:

יהי π^* הסידור שמתקבל ~~ב~~ מהאלגו'

המתואר בהגדרת $degen3$.

לפי הגדרת $degen1$,

$degen1(G) = \min_{\pi} \Delta_\pi \le \Delta_{\pi^*}$. ☐

נראה עתה $\mathrm{degen}3(G) \le \mathrm{degen}2^{e}(G)$.

__הוכחה:__

יהי π^* הסידור שמתקבל מהאלג' שמגדיר את $\mathrm{degen}3(G)$, ויהי v_i הקודקוד בסידור כך ש- $\deg_{\{v_{i+1},\dots,v_n\}}(v_i) = \Delta_{\pi^*}$.

יהי v_j, $i<j$, קודקוד כלשהו מאוחר יותר בסידור π^*. אם $\deg_{\{v_i,v_{i+1},\dots,v_n\}}(v_j) < \boxed{\deg_{\{v_{i+1},\dots,v_n\}}(v_i)}$

אז ניתן להחליף בין v_i ו- v_j ולקבל סידור π שבו הדרגה ימינה של v_j קטנה ממש מ- Δ_{π^*}, בסתירה לכך ש- π^* העדיף את v_i. (נשים לב שההחלפה עשויה לשנות את הדרגה ימינה של v_j, אך היא עדיין תהיה שווה ל- $\deg_{\{v_i,v_{i+1},\dots,v_n\}}(v_j) < \Delta_{\pi^*}$.)

זאת סתירה. לכן

$\deg_{\{v_i,v_{i+1},\dots,v_n\}}(v_j) \ge \Delta_{\pi^*}$,

ולכן

$$\Delta_{\pi^*} = \delta(G[\{v_i,v_{i+1},\dots,v_n\}]) \le$$

$$\le \max_{U} \delta(G(U)) = \text{degen}(G).$$

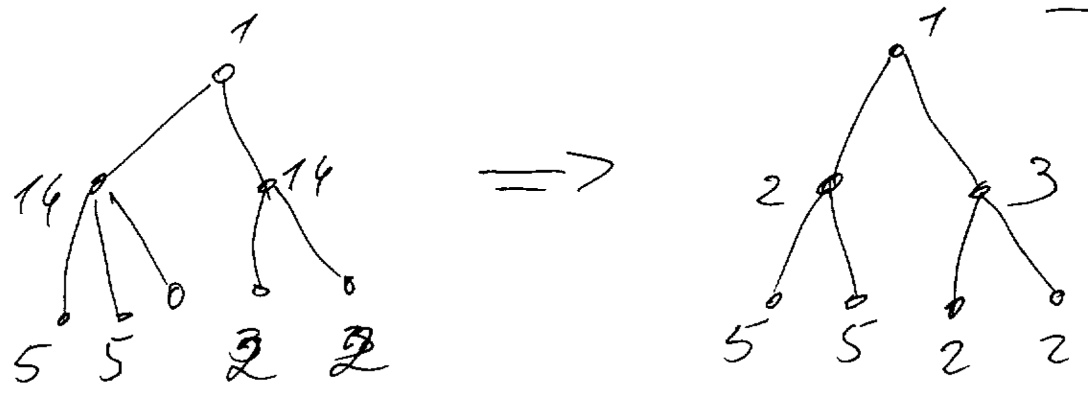
מ.ש.ל.

2.א. עשינו בכיתה.

2.ב. לא, רדוקציית WA לא עובדת, לא מאפשרת להוריד (10d)-צביעה ל-(d+1)-צביעה בגרף עם ניוון d.
הסיבה היא שהיא מסתמכת על רדוקציית הצבעים הסטנדרטית: ה קודקודים של קב' צבע 10d מנסה במקביל להחליף את הצבע שלהם לצבע בתוך $\{1+d,\ldots,2,1\}$.
אבל לכ"א מהם עשויים להיות > d שכנים צבועים, ולכן הם לא בהכרח יצליחו להיצבע מחדש.

3.א. לא, האלג' לא טוב. הסיבה היא שאחרי הפעלה אחת של Shift-Down וצביעה מחדש של קודקודים בצבע 14 עשוי להיווצר מצב שבו יש [illegible] שצבועים בצבעים שונים צמ"ל.

קודמו:



3ב.

רקורסיה שעושה Shift-Down ובניה.
מחייב תיקה 2·(120−3) סיבובים.
באמצעות CV אפשר תוך מס' קבוע
קטן של סיבובים להגיע ל-6-צביעה,
ומשם ב-6 סיבובים נוספים
להגיע ל-3-צביעה.
אפשר גם להשתמש ב Kuhn-Watten
אך להקפיד לעשות Shift-Down אחרי
כל סיבוב.
כאן אנו מחלקים את קב' הצמתים
ל {1,2,3,4}, {5,6,7,8}, ~ - - - {117,...,120}
ובכל קב' במקביל (עושים Shift-Down
כך כולן ~~ש~~ מבטלים את הצבע הגדול ביותר.
כך מגיעים למקס' של $120\cdot\frac{3}{4}=90$ צבעים.
וממשיכים כך.

4) בהתחלה יש $\log n$ ביטים של זבל.

תוך ~~20~~ 21 סיבובים יש $\log^{(21)} n + O(1)$

ביטים של זבל* ~~ותוך סיבוב נוסף~~

~~$O(\log^{(22)} n$ ביטים~~ דה"נו) $O(\log^{(21)} n)$

זבלים.

קל להיווכח שאפשר להשתמש באלג' CV

גם במעגל בלי אוריינטציה, ולא רק

בעץ עם אוריינטציה.

5) כל צלע של H עשויה לחתוך לכל היותר
שתי צלעות של ~~H~~H^* לכן אם
$\frac{|H^*|}{2} < |H|$, אז יש צלע e של H^* שלא
נחתכת עם אף אחת מצלעות של H.
לכן $H \cup \{e\}$ הוא שידוך, סתירה!