אלגוריתמים מבוזרים, הרצאות 14 – 17

הגדרה

בהינתן צביעה כלשהי φ, אשר אינה בהכרח חוקית, נגדיר את *הפגם* שלה להיות הַ-$\rho \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך שלכל קדקוד $v \in V$ יש לכל היותר ρ שכנים בתת-הגרף המונוכרומטי בצבע $\varphi(v)$, כלומר בתת-הגרף המושרה על-ידי כל הקדקודים הצבועים בצבע $\varphi(v)$. נאמר כי φ היא α-*צביעה* ρ-*פגומה* אם היא α-צביעה וגם הפגם שלה הוא ρ.

סְמונים

בהינתן גרף $G = (V, E)$ וצביעה φ, נגדיר את הסְמונִים הבאים:

- $\Gamma(v)$ – אוסף כל השכנים של קדקוד v.
- $\Gamma(v) \uparrow_c$ – אוסף כל השכנים של v שהינם בצבע c.

<u>לֶמֶת לובאש (1966)</u>: לכל גרף G ולכל $1 \leq \rho \leq \Delta$ קיימת $\left\lceil \frac{\Delta}{\rho} \right\rceil$-צביעה ρ-פגומה.

<u>הוכחה</u>:

תהא φ איזושהי $\left\lceil \frac{\Delta}{\rho} \right\rceil$-צביעה. אם הפגם שלה $\geq \rho$, סיימנו. אחרת, יהא $v \in V$ קדקוד כך שיש לו יותר מִ-ρ שכנים בעלי אותו הצבע $\varphi(v)$ כמוהו. ישנם $\left\lceil \frac{\Delta}{\rho} \right\rceil$ צבעים ולכן קיים צבע $c \in \left\{1, \dots, \left\lceil \frac{\Delta}{\rho} \right\rceil\right\}$ שבו צבועים לכל היותר[1] ρ שכנים של v. נקבע $\varphi(v) = c$. נסמן בְּ-M את מספר הצלעות המונוכרומוטיות טרם השינוי ובְּ-M' לאחר השינוי. אזי: $M' = M - \underbrace{\left|\Gamma(v) \uparrow_{\varphi(v)}\right|}_{>\rho} + \underbrace{\left|\Gamma(v) \uparrow_c\right|}_{<\rho}$. מצד שני, $M \leq |E|$, וגם בכל פעם M קטן לפחות באחד. ברור כי M לא יורד אל מתחת לאפס[2], ולכן בשלב סופי מסוים כבר לא יהיה קדקוד v כנ"ל. באותו השלב, הצביעה שלנו תהיה ρ-פגומה, והיות ולא הגדלנו את כמות הצבעים היא תהיה בסך-הכל $\left\lceil \frac{\Delta}{\rho} \right\rceil$-צביעה ρ-פגומה.

מסקנה

אילו היה לנו אלגוריתם יעיל[3] לצביעת לובאש[4], אז היינו מקבלים $\left\lceil \frac{\Delta}{\rho} \right\rceil$ תתי-גרפים מונוכרומטיים, כאשר בכל אחד דרגתו המֵרבית הינה $\geq \rho$, ולכן בזמן נוסף של $\rho \cdot \log \rho + \log^* n$ היינו מקבלים $\rho + 1$-צביעה של כל תת-גרף, ואם נקנה לכל תת-גרף צבעים יחודיים, נקבל שזוהי $(\rho + 1) \cdot \left\lceil \frac{\Delta}{\rho} \right\rceil \leq \Delta + \frac{\Delta}{\rho} + \rho + 1$-צביעה של הגרף כולו. ממנה נגיע לְ-$\Delta + 1$-צביעה תוך $O\left(\frac{\Delta}{\rho} + \rho\right)$ זמן. כלומר, סך-הזמן שלנו עד לקבלת $\Delta + 1$-צביעה יהיה $O\left(\frac{\Delta}{\rho} + \rho \cdot \log \rho + \log^* n + \underset{\text{צביעת לובאש}}{\text{זמן חישוב}}\right)$, ולכן נוכל לבחור $\rho = \sqrt{\Delta \cdot \log \Delta}$, ואז נקבל $\Delta + 1$-צביעה תוך $O\left(\sqrt{\Delta \cdot \log \Delta} + \log^* n + \underset{\text{צביעת לובאש}}{\text{זמן חישוב}}\right)$ זמן.

הגדרה

תהי $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ משפחה של קבוצות. נאמר כי $\mathcal{F}$ היא Δ-*חסרת-איחוד* ρ-*חסרת-כיסוי* אם לכל $F^{(0)} \in \mathcal{F}$ ולכל $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(\Delta)} \in \mathcal{F}$ קיים איבר בְּ-$F^{(0)}$ אשר אינו מופיע יותר מאשר ρ פעמים בּאִחוד

---

[1] מעקרון שובך היונים, יש לנו $\left\lceil \frac{\Delta}{\rho} \right\rceil$ צבעים שונים וּכְבָר ידוע שיש אחד שצבועים בו יותר מאשר ρ מלכל היותר Δ שכניי v, ולכן קיים וְלוּ צבע אחד שבו צבועים פחות מאשר ρ משכניי v.

[2] כי הוא מציין כמות.

[3] ההוכחה ללמה לעיל מהווה בעצם אלגוריתם לבנית צביעה שכזו, אך היא טריויאלית ואיננה יעילה בכלל. ביעילות נרצה כזה אשר דורש $\log^* n + O(1)$ זמן.

[4] צביעה כמו בלמה לעיל, אין קשר ללמת המקומיות של לובאש.

של Δ הקבוצות האחרות בנוסף, כמו קודם, ישנה *קבוצת הבסיס* $\{1,2,\dots,m\}$ כך שלכל F_i מתקיים: $F_i \subseteq \{1,2,\dots,m\}$. נרצה לבחור m אשר יותר קטן ממה שבחרנו קודם לכן, שכן כאן הדרישה שלנו היא חלשה יותר.

הרחבת הבניה האלגברית

נרחיב את הגישה האלגברית, לכדי בנית משפחה של קבוצות Δ-חסרת-איחוד ρ-חסרת-כיסוי, כאשר הפעם מותר לנו שיהיה פגם, ולכן נחפש $m \ll O(\Delta^2 \cdot \log N)$. בדומה לקודם, בהינתן מספר ראשוני q ומספר טבעי D, נתבונן בשדה $\mathbb{Z}_q$ ובאוסף הפולינומים מעל השדה אשר מעלתם $\geq D$. אז יש q^{D+1} פולינומים שונים, ולכל אחד p_i נתאים את הקבוצה $F_i = \{\langle 0, p_i(0)\rangle, \langle 1, p_i(1)\rangle, \dots, \langle q-1, p_i(q-1)\rangle\}$.

אז קבוצת הבסיס שלנו תהיה $m = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$, והיות ו-$|\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q| = q^2$, נוכל להניח כי גם מספרנו את כל הזוגות בְּ-$\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ באינדקסים בתחום $1 \leq j \leq q^2$, ולכן נניח כי $m = \{1,2,\dots,q^2\}$. כל שני פולינומים שונים ממעלה D נחתכים בלכל היותר D נקודות. נשים לב כי עתה אנו מחפשים איבר מסוים בְּ-F_i, אך לא כמו קודם – שם רצינו שהוא לא יופיע בקבוצות האחרות, כאן אנו מרשים לו להופיע בקבוצות אחרות, אך לא יותר מאשר ρ פעמים. נביט על F_i כעל רב-קבוצה $F_{i,\rho+1}$ בה כל איבר מופיע $\rho+1$ פעמים. כל קבוצה אחרת[5] פוגעת בְּכל היותר D איברים שונים מִ-$F_{i,\rho+1}$, ולכן צריך לפחות $\frac{\rho+1}{D}$ קבוצות בשביל לכסות איבר אחד $\rho+1$ פעמים. כלומר, צריך לפחות $\frac{(\rho+1)\cdot q}{D}$ קבוצות בכדי לכסות את כל איברי F_i, $\rho+1$ פעמים כל איבר. כלומר, אנו נדרשים בלפחות $\left\lceil\frac{(\rho+1)\cdot q}{D}\right\rceil$ קבוצות אחרות כדי שיקרה מצב אשר ממנו נרצה להימנע. אם כן, נרצה שיתקים $\Delta < \frac{(\rho+1)\cdot q}{D} \leq \left\lceil\frac{(\rho+1)\cdot q}{D}\right\rceil$, והוא יהיה $\Delta = \frac{(\rho+1)\cdot q}{D} - 1$. נעצור לרגע ונרכז את הידוע לנו:

> **הידעת?**
>
> *רב-קבוצה* (multiset) היא אוסף איברים, רק בעוד שבקבוצה כל איבר מופיע פעם אחת בלבד, ברב-קבוצה איבר יכול להופיע מספר פעמים, ויהיה מדובר ברב-קבוצות שונות. למשל, $\{1,2,3\} \neq \{1,1,2,3\}$.

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{(\rho+1)\cdot q}{D} - 1 \\ N = q^{D+1} \\ m = q^2 \end{cases}$$

מכאן נקבל:

$$\begin{cases} q = \dfrac{(\Delta+1)\cdot D}{\rho+1} \\ \log N = (D+1)\cdot \log q \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$D+1 = \frac{\log N}{\log q}$$

$$\Downarrow$$

$$q \approx \frac{(\Delta+1)\cdot \log N}{(\rho+1)\cdot \log q}$$

$$q \cdot \log q \approx \frac{(\Delta+1)\cdot \log N}{\rho+1}$$

[5] בשאר הקבוצות איננו משכפלים את האיברים, אלא משאירים אותן כְּמות שהן.

נציב $q \approx \frac{\Delta+1}{\rho+1} \cdot \log N$ ונקבל:

$$q \approx \frac{\Delta+1}{\rho+1} \cdot \log N \cdot \frac{1}{\log\log N + \log(\Delta+1) + \log(\rho+1)}$$

אז מצאנו[6] את q. עתה נציב את ערכו ונקבל:

$$m = \left(\frac{\Delta+1}{\rho+1}\right)^2 \cdot \log^2 N \cdot \left(\frac{1}{\log\log N + \log(\Delta+1) + \log(\rho+1)}\right)^2 \leq \left(\frac{\Delta+1}{\rho+1}\right)^2 \cdot \log^2 N \in O\left(\frac{\Delta^2}{\rho^2} \cdot \log^2 N\right)$$

כלומר, התחלנו עם Δ וְ-n ומהם בנינו m, q וְ-D שיתאימו לנו, ולכן ידוע לנו באיזה $\mathbb{Z}_q$ אנו עובדים, וממנו קיבלנו משפחה של קבוצות $\mathcal{F}$ שהיא Δ-חסרת-איחוד וְ-ρ-חסרת-כיסוי, עם קבוצת הבסיס $\{1,2,\dots,m\}$, בעבור הַ-m אשר מצאנו לעיל.

מקרה מיוחד

נניח כי $D = 2$, ואז $N = q^3$, בעוד שֶׁ-$m = q^2$. במקרה זה:

$$\Delta + 1 = \frac{(\rho+1)\cdot q}{D} = \frac{(\rho+1)\cdot q}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$q = 2 \cdot \frac{\Delta+1}{\rho+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} m = 4 \cdot \dfrac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \\ N = 8 \cdot \dfrac{(\Delta+1)^3}{(\rho+1)^3} \end{cases}$$

כלומר, תוך שלב אחד בנינו משפחה של $8 \cdot \frac{(\Delta+1)^3}{(\rho+1)^3}$ קבוצות Δ-חסרת-איחוד ρ-חסרת-כיסוי מעל קבוצת בסיס $\left\{1,\dots,4 \cdot \frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2}\right\}$.

צביעה פגומה בזמן יעיל

עתה נשתמש במערכת הקבוצות $\mathcal{F} = \{F_1,\dots,F_N\}$ שבנינו בכדי לקבל $O\left(\frac{\Delta^2}{\rho^2}\right)$-צביעה ρ-פגומה, כאשר נתחיל מִ-N-צביעה D-פגומה כלשהי. כלומר, $\mathcal{F}$ היא Δ-חסרת-איחוד ρ-חסרת-כיסוי מעל קבוצת בסיס $\{1,\dots,m\}$. כל קדקוד $v \in V$, במקביל, מביט על $F_{\varphi(v)}$ ועל $F_{\varphi(u_1)}, F_{\varphi(u_2)}, \dots, F_{\varphi(u_\Delta)}$ של שכניי v, כלומר $u_1, u_2, \dots, u_\Delta \in \Gamma(v)$ $(u_i \neq u_j)$[7]. מתוך $F_{\varphi(v)}$ הוא בוחר צבע c אשר מופיע לכל היותר ρ פעמים בְּ-$F_{\varphi(u_1)}, F_{\varphi(u_2)}, \dots, F_{\varphi(u_\Delta)}$, וקובע $\psi(v) = c$. קיים כזה c היות וְ-$\mathcal{F}$ היא ρ-חסרת-כיסוי. נבחר $m \in O\left(\frac{\Delta^2}{p^2} \cdot \log^2 N\right)$. אז קיבלנו m-צביעה. כמו-כן, הפגם שלנו עתה יהיה $\rho + D \geq$ – שזה הפגם הקודם ועוד הפגם שהוספנו עתה.

---

[6] כמו קודם, עלינו לודא האם q ראשוני, ואם לא – מעקרון ברטרנד-צ'בישב, לכל היותר נגדיל את q פי שתיים.

[7] קיימים לכל היותר Δ שכנים, ולכן נניח לשם פשטות כי אכן ישנם Δ כאלו.

הידעת?

באופן דומה לְ-$\log^* n$, הפעולה $\log^{2,*} n$ היא כמות הפעמים שיש להפעיל $\log^2$, ואז $\log^2$ על התוצאה, עד שנקבל מספר קטן מִ-2. נרחיב הגדרה זו לְ-$\log^{k,*} n$ – כמות הפעמים שיש להפעיל $\log^k$, ואז $\log^k$ על התוצאה, עד שנקבל מספר קטן מִ-2. נשים לב שֶ-$\log^{k,*} n \leq k \cdot \log^* n$, ולכן $\log^{k,*} n \in O(\log^* n)$. בנוסף, נכניס את הסימון $\log^{k,(t)} n$ שפֵּרושו הפעלת $\log^k$, ואז $\log^k$ על התוצאה, במשך t פעמים.

נשתמש בזה עתה בכדי לקבל את הצביעה הפגומה שרצינו – נתחיל מצביעה לפי Id, כלומר – כל קדקוד בכל צבע יחודי. אז זוהי n-צביעה שאינה פגומה. נבחר $m = 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \log^2 n \in O\left(\frac{\Delta^2}{\rho^2} \cdot \log^2 n\right)$. לאחר סיבוב אחד קיבלנו $4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \log^2 n$-צביעה ρ-פגומה[8]. לאחר הסיבוב השני נקבל $= 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \log^2\left(4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \log^2 n\right)$

$$4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \left(\log 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} + \log\log^2 n\right)^2$$

-צביעה $4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2}$-צביעה 2ρ-פגומה. לאחר הסיבוב השלישי נקבל שיש לנו

$$4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \log^2\left(4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \left(\log 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} + \log\log^2 n\right)^2\right) \leq 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \left(\log 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} + \log\log^2 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} + \log\log^2\log^2 n\right)^2$$

-צביעה 3ρ-פגומה. נסמן: $t = 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2}$. אם כן, לאחר השלב הראשון היתה לנו $t \cdot \log^2 n$-צביעה ρ-פגומה, לאחר השני $t \cdot (\log t + \log\log^2 n)^2$-צביעה 2ρ-פגומה, לאחר השלישי $t \cdot (\log t + \log\log^2 t + \log\log^2\log^2 n)^2$-צביעה 3ρ-פגומה, ולכן לאחר $\log^{2,*} n$ שלבים נקבל $t \cdot \left(\log t + \log\log^2 t + \log\log^2\log^2 t + \ldots + \log\log^{2,\left(\log^{2,*} n\right)} n\right)^2$-צביעה $\log^{2,*} n \cdot \rho$-פגומה, שהיא בעצם $O(t \cdot \log^2 t) = O\left(\frac{\Delta^2}{\rho^2} \cdot \log^2\frac{\Delta}{\rho}\right)$-צביעה $\log^{2,*} n \cdot \rho$-פגומה.

נלך קדימה עוד שלב אחד. בעצם, יש לנו עתה משפחת קבוצות עם $N = 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \cdot \log^2 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2} \leq 8\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2}$, וראינו שמכאן נקבל $m = 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2}$, כלומר $O\left(\frac{\Delta^2}{\rho^2}\right)$-צביעה $\rho \cdot (\log^{2,*} n + 1)$-פגומה, בעוד צעד אחד. אז אמנם הגענו לצביעה שרצינו, *אבל מהו זמן הריצה?* פשוט כמות השלבים, שהיא $\log^{2,*} n + 1 \in O(\log^* n)$. נרצה לשפר את זמן הריצה, ולהגיע לְ-$\log^* n$ פשוט. *כיצד נעשה זאת?* במקום להתחיל מצביעה יחודית, נתחיל עם $O(\Delta^2)$-צביעת ליניאל. אז לאחר $\log^{2,*}\Delta^2 + 1$ שלבים[9] נקבל $4 \cdot \left(\frac{\Delta+1}{\rho+1}\right)^2$-צביעה $\rho \cdot (\log^{2,*}\Delta + 1) \in O(\rho \cdot \log^*\Delta)$-פגומה. נסמן: $\rho' = \frac{\rho}{\log^*\Delta}$. אז באותו האופן נקבל $4 \cdot \left(\frac{\Delta+1}{\rho'+1}\right)^2 \cdot \log^*\Delta$-צביעה ρ'-פגומה, שהיא הרי $4 \cdot \left(\frac{\Delta+1}{\rho+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\log^*\Delta} \cdot \log^*\Delta = 4 \cdot \left(\frac{\Delta+1}{\rho+1}\right)^2$-צביעה ρ-פגומה. כלומר, סך הזמן שלנו הינו $\log^* n + \log^*\Delta + O(1)$.

אלגוריתם לְ-Δ+1 צביעה[10]

נבחר $\rho = \frac{\Delta}{\log\Delta}$, ואז נקבל φ שהיא $O(\log^2\Delta)$-צביעה $O\left(\frac{\Delta}{\log\Delta}\right)$-פגומה, תוך $\log^* n + O(1)$ זמן. נחלק את הגרף לְ-$O(\log^2\Delta)$ תתי-גרפים מונוכרומטיים. נשים לב כי דרגת כל אחד היא לכל היותר הפגם. נסמן בְּ-Δ' את המֵרבית מבין דרגות כל תתי-הגרפים הללו. על-כן $\Delta' \leq O\left(\frac{\Delta}{\log\Delta}\right)$. בכל תת-גרף, במקביל, נריץ

---

[8] כי הפגם התחילי היה אפס, ולכן הפגם עתה הוא $\rho = \rho + 0$.

[9] או באופן כללי: $\log^{2,*} N + 1$, כאשר N הוא מספר הצבעים עימו התחלנו. השלב האחרון הוא המעבר מִ-$N \leq 8\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2}$-צביעה לְ-$m = 4\frac{(\Delta+1)^2}{(\rho+1)^2}$ צביעה, תוך כדי הגדלת הפגם בלכל היותר ρ.

[10] מתוך מאמר של מיכאל אלקין ולאוניד בירנבוים. המאמר זמין כאן.

את האלגוריתם הטוב ביותר הידוע לנו עד כה לקבלת $\Delta'+1$-צביעה. כרגע זה שידוע לנו הוא הלה אשר בונה קודם $O((\Delta')^2)$-צביעת ליניאל תוך $\log^* n + O(1)$ זמן ולאחר מכן מריץ את רדוקצית הצבעים המהירה של קון-וואטנהופר, וסך-הזמן עבורו הינו $O(\Delta' \cdot \log \Delta') + \log^* n \leq O(\Delta) + \log^* n$. נקנה לכל תת-גרף צבעים יחודיים ונקבל כי זוהי $O\left((\log^2 \Delta) \cdot \frac{\Delta}{\log \Delta}\right) = O(\Delta \cdot \log \Delta)$-צביעה של כל הגרף, כי יש $O(\log^2 \Delta)$ תתי-גרפים, וכל אחד צבוע בְּ$\frac{\Delta}{\log \Delta}$ צבעים יחודיים. עתה נפעיל את רדוקצית הצבעים המהירה של קון-וואטנהופר ואז נקבל $\Delta+1$-צביעה תוך $\log \frac{O(\Delta \cdot \log \Delta)}{\Delta+1} = \log \frac{c \cdot (\Delta+1) \cdot \log \Delta}{\Delta+1} = O\left(\log^{(2)} \Delta\right)$ פאזות אשר לוקחות $\Delta+1$ זמן כל אחת, כלומר תוך עוד $O\left(\Delta \cdot \log^{(2)} \Delta\right)$ זמן. כלומר, הגענו לְ-$\Delta+1$-צביעה תוך $O(\Delta \cdot \log \log \Delta) + 2 \log^* n$ זמן.

אבל רצינו זמן ריצה מהיר יותר.. *מה נעשה?* נבנה אלגוריתם חדש, אשר מתבסס על האלגוריתם שלנו. נקרא לאלגוריתם שתיארנו עד כה בשם $\mathcal{A}_1$. עתה, בהתבסס על $\mathcal{A}_1$, נתאר את $\mathcal{A}_2$. נבחר $\rho = \log \log \Delta$, ואז יש לנו $O(\log^2 \log \Delta)$-צביעה $\frac{\Delta}{\log \log \Delta}$-פגומה. נחלק לְ-$(\log^2 \log \Delta)$ תתי-גרפים, ונסמן בְּ-Δ' את הדרגה המֵרבית בתתי-הגרפים, אשר הינה לכל היותר הפגם של הצביעה. כלומר, $\Delta' \leq \frac{\Delta}{\log \log \Delta}$. בכל אחד מתתי-הגרפים נחשב, במקביל, $\Delta'+1$-צביעה באמצעות האלגוריתם $\mathcal{A}_1$ תוך $O(\Delta' \cdot \log \log \Delta') + 2 \cdot \log^* n$ זמן. לכל תת-גרף ניתן צבעים יחודיים, ולכן יוצא לנו שזוהי $O(\Delta \cdot \log \log \Delta)$-צביעה של הגרף כולו. באמצעות רדוקצית הצבעים המהירה של קון-וואטנהופר נרד לְ-$\Delta+1$-צביעה תוך $(\Delta+1) \cdot \log \frac{O(\Delta \cdot \log \log \Delta)}{\Delta+1} = O(\Delta \cdot \log \log \log \Delta)$ זמן. אז עתה קיבלנו $\Delta+1$-צביעה בעבור כל הגרף, כאשר סך הזמן הינו $O(\Delta \cdot \log \log \log \Delta) + 3 \log^* n$.

אבל זה עדיין לא זמן הריצה שאליו שאפנו! אם כן, נרחיב את הרעיון –

באופן כללי, נניח אינדוקטיבית שיש לנו אלגוריתם $\mathcal{A}_i$ אשר מחשב $\Delta+1$-צביעה תוך $O\left(\Delta \cdot \log^{(i+1)} \Delta\right) + (i+1) \cdot \log^* n$ זמן, בעבור כל $1 \leq i \leq \log^* \Delta$. את מקרה הבסיס – $\mathcal{A}_1$ – כבר ראינו קודם לכן. על-סמך $\mathcal{A}_i$, נבנה את $\mathcal{A}_{i+1}$. נבחר $\rho = \log^{(i)} \Delta$, ואז יש לנו $O\left(\left(\log^{(i)} \Delta\right)^2\right)$-צביעה $\frac{\Delta}{\log^{(i)} \Delta}$-פגומה. נחלק לְ-$\left(\log^{(i)} \Delta\right)^2$ $O\left(\left(\log^{(i)} \Delta\right)^2\right)$ תתי-גרפים מונוכרומטיים, ונסמן בְּ-Δ' את המֵרבית מבין כל הדרגות המֵרביות של כל אחד מתתי-הגרפים. אז $\Delta' \leq \frac{\Delta}{\log^{(i)} \Delta}$. בכל תת-גרף נחשב $\Delta'+1$-צביעה באמצעות האלגוריתם $\mathcal{A}_i$ תוך $O\left(\Delta' \cdot \log^{(i+1)} \Delta'\right) + (i+1) \cdot \log^* n$ זמן. נקנה צבעים יחודיים לכל תת-גרף, ולכן נקבל שזוהי $O\left(\Delta \cdot \log^{(i)} \Delta\right)$-צביעה. $\leq \underbrace{\left(\log^{(i)} \Delta\right)^2}_{\substack{\text{מספר תתי-}\\\text{הגרפים}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\Delta}{\log^{(i)} \Delta}\right)}_{\substack{\text{מספר הצבעים}\\\text{בכל תת-גרף}}}$

באמצעות רדוקצית הצבעים המהירה של קון-וואטנהופר נרד לְ-$\Delta+1$-צביעה תוך $\log \frac{O\left(\Delta \cdot \log^{(i+1)} \Delta\right)}{\Delta+1} = \log \frac{c \cdot (\Delta+1) \cdot \log^{(i+1)} \Delta}{\Delta+1} = O\left(\log^{(i+2)} \Delta\right)$ פאזות שכל אחת נמשכת $\Delta+1$ זמן, כלומר תוך $O\left(\Delta \cdot \log^{(i+2)} \Delta\right)$ זמן. עתה קיבלנו $\Delta+1$-צביעה בעבור כל הגרף, כאשר סך הזמן הינו $O\left(\Delta \cdot \log^{(i+2)} \Delta\right) + (i+2) \cdot \log^* n$. כעבור $i = \log^* \Delta - 1$ שלבים האלגוריתם שלנו יניב $\Delta+1$-צביעה תוך $O(\Delta) + \log^* \Delta \cdot \log^* n$ זמן.

אבל זה עוד לא זמן הריצה שרצינו. *כיצד נשפרו?* נרצה לחשב את הצביעות הפגומות תוך $O(1)$ זמן, למעט הראשונה אשר תיקח $O(1) + \log^* n$ זמן. נחשב φ שהיא $O(\Delta^2)$-צביעת ליניאל תוך $O(1) + \log^* n$ זמן. עתה נחשב $O\left(\frac{\Delta}{\log \Delta}\right)$-פגומה תוך $O(1) + \log^* \Delta$, מתוך φ. נחלק לתתי-גרפים. אז $\Delta' \leq \frac{\Delta}{\log \Delta}$, ואנו רוצים $O(\Delta')$-צביעה של כל תת-גרף. ניזכר כי $\Delta' \leq \frac{\Delta}{\log \Delta}$, ולכן φ

מהווה $O((\Delta')^2 \cdot \log \Delta') \leq O((\Delta')^3)$-צביעה בכל תת-גרף. מכאן תוך צעד אחד, על-ידי הבניה האלגברית של מערכת קבוצות Δ'-חסרת-איחוד נקבל $O((\Delta')^2)$-צביעה של כל תת-גרף. מכאן, לאחר עוד $\log^* n + O(1)$ סיבובים, נקבל $O(\log^2 \Delta')$-צביעה $O\left(\frac{\Delta'}{\log \Delta'}\right)$-פגומה, ואז האלגוריתם $\mathcal{A}_1$ יקח $O(\Delta' \cdot \log \Delta') + \log^* n + \log^* \Delta = O(\Delta) + \log^* n + \log^* \Delta$ זמן, ועבור כל $2 \leq i \leq \log^* \Delta$, הפעלת $\mathcal{A}_i$ לוקחת $O\left(\Delta' \cdot \log^{(i)} \Delta'\right) + \log^* n = O(\Delta) + \log^* n$ זמן. הפעלת רדוקצית הצבעים של קון-וואטנהופר לוקחת $O\left(\Delta \cdot \log^{(i+1)} \Delta\right)$ זמן, ולכן כלל הזמן של $\mathcal{A}_{i+1}$ הינו $O\left(\Delta \cdot \log^{(i+1)} \Delta\right) + \log^* n + \log^* \Delta + O(1) + O(\Delta) + \log^* n + O\left(\Delta \cdot \log^{(i+1)} \Delta\right) = O\left(\Delta \cdot \log^{(i+1)} \Delta\right) + \log^* n$, ובסוף בעבור $i = \log^* \Delta$ נקבל כי זמן הריצה הינו $O\left(\Delta \cdot \log^{\log^* \Delta} \Delta\right) + \log^* n = O(\Delta) + \log^* n$ זמן. כלומר, הגענו לְ-$\Delta + 1$ זמן תוך $O(\Delta) + \log^* n$ זמן.

אלגוריתם קון לְ-Δ+1 צביעה[11]

שוב נחשב $O\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)$-צביעה ρ^2-פגומה, רק שכאן נבחר ρ קבוע, כך שֶ: $O\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) = \frac{\Delta}{2}$. אז $\rho = O(1)$ מסוים. אז קיבלנו $O(1)$-צביעה $\frac{\Delta}{2}$-פגומה. נחלק את הגרף לְ-$O(1)$ תתי-גרפים, כל אחד מונוכרומטי. נחשב רקורסיבית בכל תת-גרף $\frac{\Delta}{2} + 1$-צביעה. זה אפשרי היות וְ-$\Delta' \leq \frac{\Delta}{2}$. נקנה לכל תת-גרף קבוצת צבעים יחודית, ולכן נקבל בסך-הכל $\left(\frac{\Delta}{2} + 1\right) \cdot O(1) = O(\Delta)$-צביעה לגרף כולו. באמצעות רדוקצית הצבעים הסטנדרטית נגיע לְ-$\Delta + 1$-צביעה של הגרף כולו, תוך עוד $O(\Delta)$ זמן. *כמה זמן כל התהליך לקח לנו?*

$$\begin{aligned} T(\Delta, n) &= T\left(\frac{\Delta}{2}, n\right) + \log^* n + c \cdot \Delta = T\left(\frac{\Delta}{4}, n\right) + 2\log^* n + c \cdot \Delta + \frac{c}{2} \cdot \Delta = \ \dots \\ &= T(1, n) + \log \Delta \cdot \log^8 n + c \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ \dots + \frac{1}{2^{\log^* n}}\right) \cdot \Delta \\ &\leq \log^* n \cdot (1 + \log \Delta) + 2c \cdot \Delta \in O(\log \Delta \cdot \log^* n) + O(\Delta) \end{aligned}$$

אם כן, *כמעט* הגענו לזמן הריצה שרצינו! *כיצד ניפטר מהכפל* בְּ-$\log \Delta$?

נרצה לחשב את הצביעות הפגומות ביתר קלות. נחשב $O(\Delta^2)$-צביעת ליניאל φ תוך $\log^* n + O(1)$ זמן, ומשם נחשב $O(1)$-צביעה $\frac{\Delta}{2}$-פגומה תוך $\log^* \Delta$ זמן. מִ-φ נחשב תוך $O(1)$ סיבובים $O((\Delta')^2)$-צביעה לכל תת-גרף, על-ידי בנית ליניאל מִ-$O(\Delta^2) \leq O((\Delta')^3)$-צביעה לְ-$O((\Delta')^2)$-צביעה. עתה, לאחר שחישבנו זאת מראש, נקבל כי זמן הריצה הינו:

$$\begin{aligned} (\Delta, n) &= T\left(\frac{\Delta}{2}, n\right) + \log^* n + \log^* \Delta + c \cdot \Delta = T\left(\frac{\Delta}{4}, n\right) + \log^* n + \log^* \Delta + c \cdot \Delta + \frac{c}{2} \cdot \Delta = \ \dots \\ &= \log^* \mathrm{n} + \log^* \Delta + c \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ \dots + \frac{1}{2^{\log^* n}}\right) \cdot \Delta \in O(\Delta) + \log^* n \end{aligned}$$

נשים לב כי הַ-$\log^* \Delta$ נבלע[12] בתוך הַ-$O(\Delta)$, ולכן קיבלנו $\Delta + 1$-צביעה תוך $O(\Delta) + \log^* n$ זמן.

אלגוריתם קומבינטורי לצביעה פגומה[13]

עתה נתאר אלגוריתם לקבלת p^2-צביעה $O_\varepsilon\left(\frac{\Delta}{p}\right)$-פגומה[14] בזמן $\log^* n + p^2 \cdot \Delta^\varepsilon$, לכל $\varepsilon > 0$ שנבחר. נתחיל מִ-$O(\Delta^2)$-צביעה φ, אשר התקבלה באמצעות אלגוריתם ליניאל, תוך $\log^* n + O(1)$ זמן. נשנה אותה לצביעה פגומה. יהא q פרמטר עזר כך שֶ-$q > p^2$. נחלק את $O(\Delta^2)$ הצבעים שלנו לְ-$O\left(\frac{\Delta^2}{q}\right)$

---

[11] פָּבְּיאַן קון, המאמר זמין כאן.

[12] אבל זה לא נכון בעבור הַ-$\log^* n$ שגם הוא נבלע בַּ-$O(\Delta)$, כי לא ידוע מהו היחס בין Δ לְ-n.

[13] מתוך מאמר של מיכאל אלקין ולאוניד בירנבוים. המאמר זמין כאן.

[14] הכוונה היא שֶּ-$O_\varepsilon(\cdot)$ אנו מתיחסים אל ε כאל קבוע, למשל $O_\varepsilon(2^\varepsilon) = O_\varepsilon(1)$.

קבוצות של q צבעים בכל אחת[15]. נתבונן בכל אחת מן הקבוצות הללו במקביל, ובתוך כל אחת נחשב שתי צביעות: $\psi^<$ וְ-$\psi^>$, באופן הבא:

חישוב $\psi^<$

נעבור כל הקדקודים בסדר עולה לפי צבעי φ:

① כל הקדקודים $v \in V$ בצבע 1 שומרים על צבעם. כלומר, $\psi^<(v) = \varphi(v) = 1$.

② כל הקדקודים $v \in V$ עם $\varphi(v) = 2$ מביטים על $\Gamma_{\uparrow V<\varphi(v)}(v)$ – קבוצת שכניהם בעלי צבע נמוך יותר בצביעה φ, וּבוֹחר מתוך $\{1, \dots, p\}$ צבע שמשתמשים בו כמה שפחות[16] פעמים בְּ-$\Gamma_{\uparrow V<\varphi(v)}(v)$.

③ המשך כך בעבור שאר הקדקודים, עד להללו בצבע q, כולל.

עתה הגדרנו את $\psi^<$ בעבור כל v בתת-הקבוצה שלנו. נשים לב כי כאשר אנו באים לצבוע את v אז מביטים על v $\deg_{\uparrow V<\varphi(v)}$ קדקודים אחרים ויש p צבעים, אז קיים לפחות צבע אחד אשר מופיע לכל היותר $\frac{\deg_{\uparrow V<\varphi(v)} v}{p}$ פעמים, ולכן עתה יש לכל קדקוד לכל היותר $\frac{\deg_{\uparrow V<\varphi(v)} v}{p}$ שכנים שצבועים בצבע שלו בְּ-$\psi^<$ והיו במקור בעלי צבע φ קטן יותר. כלומר, הם בְּ-$V^{<\varphi(v)}$.

חישוב $\psi^>$

נעבור כל הקדקודים בסדר יורד לפי צבעי φ:

① כל הקדקודים $v \in V$ בצבע 1 שומרים על צבעם: $\psi^>(v) = \varphi(v) = 1$.

② כל הקדקודים $v \in V$ עם $\varphi(v) = 2$ מביטים על $\Gamma_{\uparrow V>\varphi(v)}(v)$ – קבוצת שכניהם עם צבע גדול יותר בְּ-φ, וּבוֹחר מתוך $\{1, \dots, p\}$ צבע שמשתמשים בו כמה שפחות פעמים בְּ-$\Gamma_{\uparrow V>\varphi(v)}(v)$.

③ המשך כך בעבור שאר הקדקודים, עד להללו בצבע q, כולל.

הגדרנו את $\psi^>$ בעבור כל v בתת-הקבוצה שלנו. באופן דומה לקודם, נקבל כי יש לכל קדקוד לכל היותר $\frac{\deg_{\uparrow V>\varphi(v)} v}{p}$ שכנים שצבועים בצבע שלו בְּ-$\psi^>$ והיו במקור בעלי צבע φ גדול יותר. כלומר, הם בְּ-$V^{>\varphi(v)}$.

אז הגדרנו שתי צביעות $\psi^<$ וְ-$\psi^>$ בעבור כל הקדקודים בתת-הקבוצה הראשונה. עתה נגדיר $\psi(v) = \langle \psi^<(v), \psi^>(v) \rangle$. ניזכר כי הן $\psi^<$ והן $\psi^>$ הן p-צביעה כל אחת. כלומר, ψ היא p^2-צביעה בתת-הקבוצה הראשונה, אך *מה הפגם שלה?* נשים לב כי היות והתחלנו מצביעת ליניאל, שהיא צביעה חוקית, אזי $\deg v = \deg_{\uparrow V<\varphi(v)} v + \deg_{\uparrow V>\varphi(v)} v$, כי לְ-$v$ אין שכנים בעלי אותו הצבע בְּ-φ כמוהו[17]. ישנם לכל היותר $\frac{\deg_{\uparrow V<\varphi(v)} v}{p}$ שכנים של v בעלי אותו הצבע $\psi^<(v)$ ולכל היותר $\frac{\deg_{\uparrow V>\varphi(v)} v}{p}$ שכנים בעלי אותו הצבע $\psi^>(v)$, ולכן ישנם לכל היותר $\frac{\deg v}{p}$ שכנים בעלי אותו הצבע $\psi(v)$ כמוני[18] בתת-הקבוצה הראשונה. ניזכר כי הרי $\deg v \geq \Delta$, ולכן הפגם שלי הוא לכל היותר $\frac{\Delta}{p}$. כלומר, קיבלנו p^2-צביעה $O\left(\frac{\Delta}{p}\right)$-פגומה בעבור תת-הקבוצה הראשונה. *תוך כמה זמן בנינו צביעה זו?* בניית $\psi^<$ היא בעצם q איטרציות, ולכן לוקחת q שלבים. באופן שקול, בניית $\psi^>$ לוקחת q איטרציות. בניית ψ הינה מקומית בכל קדקוד ולכן אינה לוקחת זמן. כלומר, בנינו את ψ תוך $2q$ שלבים[19].

אוקי, אבל *כיצד זה עוזר לנו בעבור הגרף כולו?* ניתן לכל תת-קבוצה פלטת צבעים משל עצמה[20]. ישנן $O\left(\frac{\Delta^2}{q}\right)$ תתי-קבוצות, בהן נגדיר את ψ במקביל, ולכן קיבלנו בסך-הכל שֶׁ-ψ היא $O\left(p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{q}\right) = O\left(\frac{\Delta^2}{\frac{q}{p^2}}\right)$-

---

[15] פרט אולי לאחרונה, למקרה וְ-$\Delta^2 \nmid q$.

[16] במידה וישנם כמה כאלו נבחר את הקטן ביותר מביניהם.

[17] כדאי לשים לב שאנו משתמשים כאן במספר צביעות, φ היא צביעה חוקית בעוד הצביעה ψ אותה אנו בונים היא תהיה בעלת פגם.

[18] מתואר מתוך נקודת המבט של הקדקוד v.

[19] למעשה נוכל למקבל את בניית $\psi^<$ וְ-$\psi^>$, שכן אין תלות של אחת בשניה בזמן בנייתן, ולכן זה יקח לנו רק q שלבים.

[20] במילים אחרות, נשתמש בצבעים יחודיים בכל תת-קבוצה.

צביעה[21] $\frac{\Delta}{p}$-פגומה של כל הגרף[22], והתקבלה תוך $2q + \log^* n$ זמן[23]. אבל זה עוד לא מה שרצינו! אם כן, נחזור על התהליך. נקרא לצביעה שקיבלנו עתה ψ_1. אז עתה נתחיל עם $\varphi_2 = \psi_1$, ונחזור על אותו התהליך. *מה השוני הפעם?* כעת φ_2 אינה צביעה חוקית. אם כן, לאחר שנבנה את $\psi_2^<$ ואת $\psi_2^>$ נרצה למצוא חסם על הפגם בצביעה $\psi_2(v) = \langle \psi_2^<(v), \psi_2^>(v) \rangle$. אז עתה

$$\deg v = \deg_{\uparrow V<\varphi_2(v)} v + \deg_{\uparrow V>\varphi_2(v)} v + \deg_{\uparrow V=\varphi_2(v)} v \le \deg_{\uparrow V<\varphi_2(v)} v + \deg_{\uparrow V>\varphi_2(v)} v + \text{הפגם של } \varphi_2$$

ולכן לכל v יש לכל היותר $\frac{\deg_{\uparrow V<\varphi_2(v)} v + \deg_{\uparrow V>\varphi_2(v)} v + \text{הפגם של } \varphi_2}{p}$ שכנים באותו הצבע $\psi_2(v)$ כמוני. שוב, נרחיב צביעה על כל הגרף על-ידי שִמוש בִּפָלֵטות צבעים שונות, ואז נקבל שֶ-ψ_2 היא $O\left(\frac{\Delta^2}{\left(\frac{q}{p^2}\right)^2}\right)$-צביעה $\frac{\Delta}{p} \cdot 2$-פגומה, אשר התקבלה תוך בסך-הכל $\log^* n + 4q$ שלבים. באופן דומה, לאחר i איטרציות כאלו נקבל ψ_i שהיא $O\left(\frac{\Delta^2}{\left(\frac{q}{p^2}\right)^i}\right)$-צביעה $i \cdot \frac{\Delta}{p}$-פגומה, אשר התקבלה תוך בסך-הכל $\log^* n + 2i \cdot q$ זמן.

עתה נרצה שיתקיים:

$$\frac{\Delta^2}{\left(\frac{q}{p^2}\right)^i} \le p^2$$

$$\left(\frac{q}{p^2}\right)^i \ge \frac{\Delta^2}{p^2}$$

$$i \cdot \log\frac{q}{p^2} \ge \log\frac{\Delta^2}{p^2}$$

$$i \ge \frac{\log\frac{\Delta^2}{p^2}}{\log\frac{q}{p^2}} = \log_{\frac{q}{p^2}}\frac{\Delta^2}{p^2} \approx \log_{\frac{q}{p^2}}\Delta^2$$

אם כן, נעצור לאחר $i \approx \log_{\frac{q}{p^2}}\Delta^2$ שלבים, ואז נקבל $O(p^2)$-צביעה $\frac{2\Delta}{p} \cdot \log_{\frac{q}{p^2}}\Delta$-פגומה תוך $4q \cdot \log_{\frac{q}{p^2}}\Delta + \log^* n + O(1)$ זמן. כלומר, זמן הריצה שלנו הינו $O\left(q \cdot \log_{\frac{q}{p^2}}\Delta\right) + \log^* n + O(1)$. נשים לב כי בסך-הכל דרשנו על q שיקיים $q > p^2$. יהא $\varepsilon > 0$. אזי מספיק לקבוע $q = p^2 \cdot \Delta^\varepsilon > p^2$, ואז $\log_{\frac{q}{p^2}}\Delta = \log_{\Delta^\varepsilon}\Delta = \frac{1}{\varepsilon}$. על-כן זמן הריצה הינו $O\left(p^2 \cdot \Delta^\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right) + \log^* n$[24], שזה שקול לִזְמַן ריצה של $O_\varepsilon(p^2 \cdot \Delta^\varepsilon) + \log^* n$.

סיכום נושא הצביעה

בעצם בכך סיימנו את נושא הצביעה הפגומה בפרט ואת נושא הצביעה בכלל, מתוך החומר הנלמד בקורס. אלגוריתמים מרכזיים שראינו:

- אלגוריתם קול-וישקין – 3-צביעת עצים בְּ-$\log^* n + O(1)$.

---

[21] ולכן רצינו $q > p^2$, אחרת אין בכך טעם.

[22] מוגדרת על כל V.

[23] כולל הזמן של בניית צביעת ליניאל.

[24] וכאן נשים לב שמצד אחד נרצה להקטין את ε, אבל בעוד שאם נעשה זאת אמנם נקטין את Δ^ε, אנו גם נגדיל את $\frac{1}{\varepsilon}$, ולכן זמן הריצה לאו דוקא ישתפר ($\varepsilon > 0$).

- רדוקציית הצבעים הסטנדרטית – כיצד ניתן מכל α-צביעה[25] להגיע לְ-$\Delta+1$-צביעה תוך $\alpha-\Delta-1$ זמן.
- רדוקציית הצבעים המהירה של קון-וואטנהופר/סזגדי-וישוואנתן – כיצד ניתן להגיע מִ-α-צביעה לְ-$\Delta+1$-צביעה תוך $O\left(\Delta\cdot\log\frac{\alpha}{\Delta}\right)$ זמן.
- אלגוריתם ליניאל לקבלת $O(\Delta^2)$-צביעה תוך $\log^* n+O(1)$ זמן, כולל שתי דרכים לבניה של משפחת קבוצות Δ-חסרות-איחוד.
- $O\left(\Delta^{\frac{3}{2}}\cdot\log\Delta\right)$-צביעה להיפר-גרפים 3-אחידים, ובאופן כללי[26] $O\left(\Delta^{1+\frac{1}{t-1}}\cdot\log\Delta\right)$-צביעה להיפר גרפים t-אחידים.
- צביעה פגומה – קבלת $\Delta+1$-צביעה של גרף כלשהו באמצעות צביעה פגומה, תוך $O(\Delta)+\log^* n$ זמן, שזוהי התוצאה הטובה ביותר שידועה לנו כיום.

הקדמה לשיעור הבא

בשיעור הבא נעבור לנושא אחר בקורס אשר טרם דיברנו עליו, למעט הגדרתו, והוא – מודל congest, בו גודל ההודעות שלנו מוגבל, שכן עד עתה לא התיחסנו כלל לגודל ההודעות, אלא רק לכמות השלבים. כמו-כן, נדבר על מערכות א-סינכרוניות, בהן הדברים עלולים להיות יותר מסובכים מכפי שהם היו עד כה.

■

[25] כאשר כאן אנו מניחים כי $\alpha>\Delta$.

[26] לא הראנו את התוצאה כללית, אלא ראינו מקרה פרטי אחד בכיתה בעבור $t=3$ ובְּתַרְגִּיל הבית עבור $t=4$.