פתרון תרגיל # 4

1. $T_{gap}(\ell) = T_{pulse}(\ell) \cdot \Delta(\ell)$.

כפי שראינו בכיתה ש

$T_{pulse}(\ell) = O(k)$

(כאשר k הוא הפרמטר של הפורש שעליו בנוי המסנכרן)

$\Delta(\ell) = O(Diam(G'))$:

לכן $T_{gap}(\ell) = O(k \cdot Diam(G))$.

חסם תחתון: הקוטר של הפורש G' של G עשוי להיות $k \cdot Diam(G)$.

בדומה לתסריט הקיצוני של מסנכרן α שבו קדקד אחד של מסילה כאורך $Diam(G)$ עשוי לחכות לקדקד השני של המסילה, כך גם כאן עשוי קדקד אחד של מסילה באורך $Diam(G') = k \cdot Diam(G)$ לחכות להודעה מהקדקד השני של המסילה. ההודעה הבאה מועברת על-גבי הצלעות של הפורש G', ולכן יקח לה $\Omega(Diam(G'))$ זמן להגיע.

[illegible] (x-[illegible]) [illegible] (h-[illegible].)

[illegible] h , h [illegible]

[illegible] $\tilde{x}$ [illegible]

[illegible] h

[illegible] , 2 , [illegible]

[illegible] (1-2 [illegible]) x [illegible]

[illegible] C -[illegible]

[illegible] h ,

[illegible] (ℓ-h) [illegible]

[illegible] x [illegible]

[illegible])

[illegible] I. [illegible]

[illegible] II.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

I. [illegible]

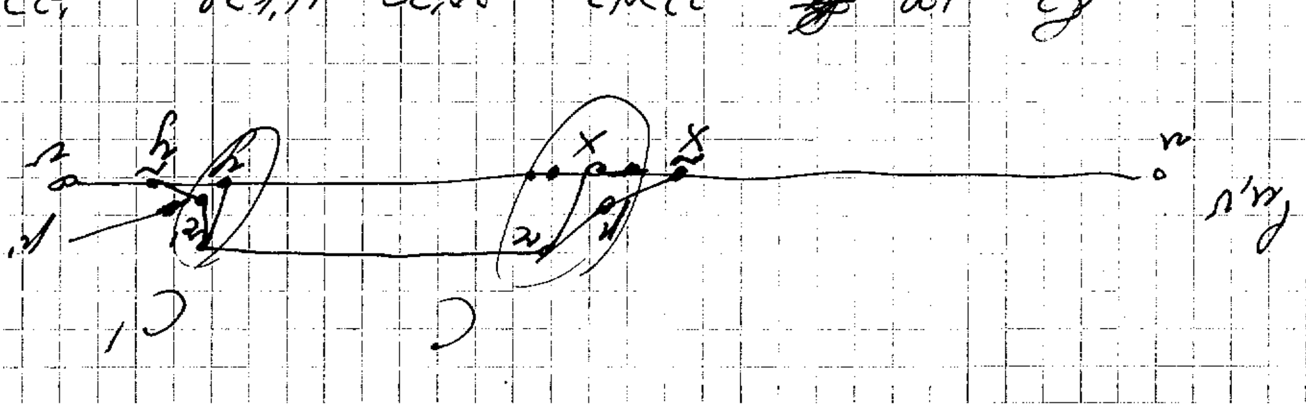
[illegible]

II. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]



כפי שראינו בהוכחת קיום הקודקודים $\tilde{x}, \tilde{y}$ C

יכיל גם את הצלעות $(u,\tilde{x}), (\tilde{y},v) \in H$.

(H הוא קבוצת הצלעות של הגרף שבנינו).

כך גם הצלעות $(\tilde{x},x'), (y',\tilde{y})$.

בנוסף, הצלע המשופרת (x',y') הוכנסה לגרף.

כמו כן ~~המסילה~~ תת-המסילה של $P_{u,v}$ שמחברת את u עם $\tilde{x}$ ($P_{u,\tilde{x}}$) ותת-המסילה של $P_{u,v}$ המחברת את $\tilde{y}$ עם v ($P_{\tilde{y},v}$), שתיהן מוכלות ב-H.

לכן

$$d_H(u,v) \le d_G(u,\tilde{x}) + \underbrace{2}_{d_H(\tilde{x},x')} + d_G(x',y') + \underbrace{2}_{d_H(y',\tilde{y})} + d_G(\tilde{y},v)$$

$$\le (d_G(u,x)-1) + 2 + d_G(x',y') + 2 + (d_G(y,v)-1)$$

$$= d_G(u,x) + d_G(x',y') + d_G(y,v) + 2.$$

לבסוף,

$$d_G(x',y') \le d_G(x,y) + 2$$

ולכן

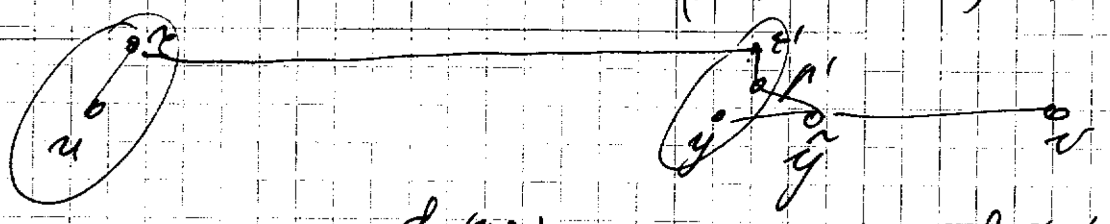
$$d_H(u,v) \le d_G(u,x) + d_G(x,y) + d_G(y,v) + 4 =$$
$$= d_G(u,v) + 4.$$

הטיעונים לעיל תקפים גם במקרה שקודקוד או שניים של $P_{u,v}$ שייכים למרכז C (בנוסף ל-x), או שקודקוד או שניים של $P_{u,v}$ בנוסף ל-y שייכים ל-C.

במקרה שאין ל-x קודם אזי $u = x$.

בדומה, אם אין ל-y עוקב אזי $v = y$.

נסתכל על המקרה ש $u = x$ אך ל-y יש עוקב (המקרים האחרים או סימטריים לזה או קלים יותר).



$$d_H(u,v) \le \underbrace{1}_{d_H(u,z)} + d_G(z,z') + \underbrace{2}_{d_H(z',\tilde{y})} + d_G(\tilde{y},v)$$

$$= 1 + d_G(z,z') + 2 + d_G(y,v) - 1 =$$

$$= 2 + d_G(z,z') + d_G(y,v) \le$$

$$\le 2 + 2 + d_G(u,y) + d_G(y,v) = d_G(u,v) + 4$$

בשוויון בגלל ש y נמצא על $\tau_{u,v}$, ו-$\tau_{u,v}$ הוא המסלול הקצר ביותר המחבר את u, v ב-G.

3.

$$\mathbb{E}(X\cdot Y) = \sum_z \mathbb{P}(X\cdot Y = z)\cdot z =$$

$$= \sum_z \sum_x \mathbb{P}\left(X = x,\ Y = \frac{z}{x}\right)\cdot x\cdot \frac{z}{x} =$$

$$= \sum_x \sum_z \mathbb{P}\left(X = x,\ Y = \frac{z}{x}\right)\cdot x\cdot \frac{z}{x} =$$

$$= \sum_x \sum_y \mathbb{P}(X = x,\ Y = y)\cdot x\cdot y =$$

($y = \frac{z}{x}$)

(X, Y ב"ת)

$$= \sum_x \sum_y \mathbb{P}(X = x)\cdot x\cdot \mathbb{P}(Y = y)\cdot y =$$

$$= \sum_x \mathbb{P}(X = x)\cdot x\cdot \sum_y \mathbb{P}(Y = y)\cdot y =$$

$$= \mathbb{E}X\cdot \mathbb{E}Y \qquad \square$$

4. נבחין לבסוף את מס' הצלעות
בגרף G כאשר e

$$|E(G)| = \sum_{(u,v)\in\binom{V}{2}} X(u,v).$$

$$\mathbb{E}(|E(G)|) = \sum \mathbb{E}(X(u,v)) = \binom{n}{2} p =$$
$$= \frac{n-1}{2}\cdot n^{1/k}.$$

$$\mathbb{E}(X(u,v)) = p$$

$$\mathbb{E}(X(u,v)^2) = p\cdot 1^2 = p,$$

$$\mathbb{E}(X(u, \quad VAR(X(u,v)) = \mathbb{E}(X(u,v)^2) -$$
$$-\mathbb{E}(X(u,v))^2 = p - p^2 = n^{1/k-1} - n^{2/k-2}.$$

$$VAR(|E(G)|) = VAR\left(\sum X(u,v)\right) =$$
$$= \binom{n}{2}\cdot(p-p^2) = \frac{n-1}{2} n^{1/k}\cdot(1-o(1))$$

$$\sigma(|E(G)|) = \Theta(n^{1/2+1/2k}).$$

$$\mathbb{P}(|E(G)| < \mathbb{E}(|E(G)|) - 10\sigma(|E(G)|))$$
$$= \mathbb{P}\left(|E(G)| < \frac{n-1}{2} n^{1/k} - 10\cdot\Theta(n^{1/2+1/2k})\right) < \frac{1}{100}.$$

$$\mathbb{P}\left(|E(G)| > \frac{n-1}{2} n^{1/k} - O(n^{1/2+1/2k})\right) \geq \frac{99}{100}.$$ לפחות

(אי־שוויון צ'בישב)

סוף הפתרון של שאלה #4.