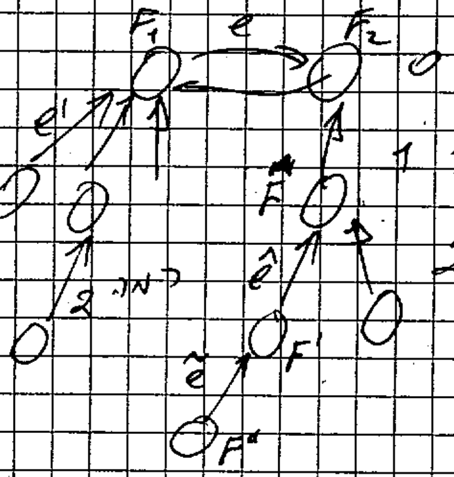
פתרון מבחן מועד ב' תשע"ב
אלג' מבוזרים

1. א. נריץ GHS דרך הקודקוד המרכזי.
יהי v הקודקוד המרכזי.
בכל פאזה כל קודקוד u ישלח ל-v
את צלעות הפרגמנט F_u כך ש $u \in F_u$,
ואת הצלע הכי קלה שיוצאת מ-u שמחברת בין F_u
לשאר הגרף. הקודקוד המרכזי v יחשב
את ה-MWOE של כל פרגמנט, ועל-סמך זה
יחשב את יער קרוסקל. אחרי זה v מקומית
יחשב את הפרגמנטים החדשים שמתקבלים אחרי
הפאזה הנוכחית, ויודיע לכל הקודקודים על השייכות
שלהם לפרגמנטים שהתקבלו. ואז הם יעברו
לביצוע הפאזה הבאה.
כל פאזה תדרוש O(1) זמן, וביחד
O(log n) זמן.

1ב. נגדיר רמה של כל צלע MWOE
ב-C באופן הבא: צלע המרכזין e היא
בעלת רמה 0. צלע e' שמקשרת פרגמנט F''
אל הפרגמנט שלו F' ב-C, כך שהמרחק
של F' מהמרכזין של C בעץ הכיווני שמרכיב
את C הוא i תהיה ברמה i+1, $i=1,2,\ldots$.



נוכיח באינד':
אם ברמה i
של צלע MWOE
e' ב-C, e
$w(e') > w(e)$.

<u>בסיס:</u> $(i=1)$.
במקרה הזה $F'=F_1$ או $F'=F_2$.
נניח בה"כ ש $F'=F_1$.
אזי גם e וגם e' שייכות ל $OE(F_1)$,
ו- $e=MWOE(F_1)$, ולכן $w(e') > w(e)$.

<u>שלב:</u> נסתכל על הצלע $\tilde{e}$ בעלת רמה $i>1$.
אזי $\tilde{e}$ מחברת F'' ל F', נניח
במרחק i מהמרכזין. נסתכל על האבא $\hat{F}$ של F',
ותהי $\hat{e}$ הצלע מ- F' ל- $\hat{F}$.
אזי הרמה של $\hat{e}$ היא i-1, ולכן, לפי הנחת
באינד', $w(\hat{e}) > w(e)$.
כמו-כן, $\tilde{e}, \hat{e} \in OE(F')$! $\hat{e} = MWOE(F')$
לכן $w(\tilde{e}) > w(\hat{e})$.
לכן $w(\tilde{e}) > w(\hat{e}) > w(e)$. מ.ש.ל.

(2) בכל מרכיב C של G נאסוף
את הטופולוגיה לקודקוד המרכזי ש', ו-ר
יחשב את כיסוי הצלעות האופטימלי

X_C עבור $G(C)=(C,E(C))$. ניקח איחוד של $\bigcup_{C\in G} X_C$
בתור הפלט שלנו.

נסמן $X=\bigcup_{C\in G} X_C$.

אזי X הוא כיסוי צלעות של G.

אכן, תהי $e=(u,v)$ צלע כלשהי.

אזי קיים מרכיב $C\in G$ כך ש $u,v\in C$,

ולכן $X_C\cap\{u,v\}\neq\emptyset$ ולכן $X\cap\{u,v\}\neq\emptyset$,
כנדרש.

נסמן ב-OPT את כיסוי הצלעות המינימלי
עבור G. אזי $OPT\cap C$ הוא כיסוי צלעות
עבור $G(C)=(C,E(C))$ לכל מרכיב C.

זאת כי נסתכל על צלע $e=(u,v)\in E(C)$.

אזי $OPT\cap\{u,v\}\neq\emptyset$.

בנוסף, $(OPT\cap C)\supseteq OPT\cap\{u,v\}$, כי $u,v\in C$.

ולכן $|X_C|\le|OPT\cap C|$.

לכן

$$|X|\le\sum_{C\in G}|X_C|\le\sum_{C\in G}|OPT\cap C|=$$

$$=\sum_{C\in G}\sum_{v\in OPT}1(v,C)=\sum_{v\in OPT}\sum_{C\in G}1(v,C)=$$

$1(v,C)=\begin{cases}1, & v\in C\\ 0, & v\notin C\end{cases}$

-3.ס-

$$= \sum_{v \in OPT} Overlap_C(v) \leq \sum_{v \in OPT} Overlap(C) =$$

(Overlap_C(v): מס' המקבצים שאליהם משתייך v ; Overlap(C) = $\max_{v \in V} \{Overlap_C(v)\}$)

$$= |OPT| \cdot Overlap(C)_n = |OPT| \cdot B$$

לכן $|X| \leq |OPT| \cdot B$.

ולכן האלג' מייצר קירוב B- לבעיית כיסוי קבוצות.
זמן הריצה שלו הוא זמן בניית כיסוי רשת ($O(\log n)$) ועוד $O(L)$.

לכן זהו $O(\log n)$-קירוב שפועל בזמן $O(\log n)$.

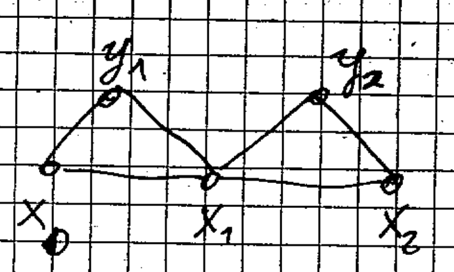
מ.ש.ל.

3. א. כן, זה נובע מהגדרה.

ב. לא.

נסתכל על הגרף

המצויר



ונגדיר

$H = \{(x_0,y_1),(y_1,x_1),(x_1,y_2),(y_2,x_2)\}$

מתקיים לכל שתי נקודות (u,v)

$d_{G'}(u,v) \leq d_G(u,v)+1$.

יחד עם זאת

$d_{G'}(x_0,x_2) = 4$

$d_G(x_0,x_2) = 2$

ולכן

$d_{G'}(x_0,x_2) \neq d_G(x_0,x_2)+1$.

$n = 1, 2, \ldots$ $\beta > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p^{k-1}(1-p) = (1-p) \cdot \frac{1}{1-p} p^{n-1} =$$

$$= p^{n-1}.$$

$$\mathbb{P}(X \geq n+1 \mid X \geq n) = \frac{\mathbb{P}((X \geq n+1) \cap (X \geq n))}{\mathbb{P}(X \geq n)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq n+1)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{p^n}{p^{n-1}} = p.$$