<u>פיתרון לתרגיל #3 באלג'ים מבוזרים</u>

1. המסנכרן מבוסס על $(2k-1)$-פורש H עם $O(n^{1+1/k})$ צלעות.
הקוטר של H מקיים $Diam(H) \le (2k-1)Diam(G)$.

ראינו ש $Time_{pulse}(\delta) = O(k)$.

הפער המירבי בין פולסים של קודקודים שונים ברשת הוא
$\Delta(\delta) \le Diam(H)$ ~~$Time_{pulse}$~~ $= O(k\cdot Diam(G))$.

לכן $Time_{gap}(\delta) \le \Delta(\delta)\cdot Time_{pulse}(\delta) = O(k^2\cdot Diam(G))$.

יחד עם זאת, ניתן להראות חסם עליון טוב יותר.

ספציפית, נגדיר $\Delta_{subpulse}(\delta)$ להיות ההפרש המקסימלי בין תת-פולסים השונים של קודקודים שונים ברשת.

(כזכור כל פולס מורכב מ-$(2k-1)$ תת-פולסים.
נמספר את כל תת-פולסים כ

$1,2,\ldots,2k-1,\ 2k,2k+1,\ldots,4k-2,4k-3,\ldots$

תתי-פולסים של הפולס הראשון, תתי-פולסים של הפולס השני.)

בדומה לניתוח של מסנכרן α,

$\Delta_{subpulse}(\delta) = O(Diam(H)) = O(k\cdot Diam(G))$.

כמו-כן, נגדיר $Time_{subpulse}(\delta)$ כמשך הזמן המקסימלי שעובר בין הרגע שאחרון הקודקודים ~~נכנס~~ מגיע לתת-פולס i לרגע שבו אחרון הקודקודים מגיע לתת-פולס $i+1$.

קל לראות ש $Time_{subpulse}(\ell) = O(1)$.

(בדומה לסעיף c $Time_{pulse}(\ell) = O(1)$.)

כמו-כן, נראה שכל קודקוד v שנמצא בתת-פולס p'_v. כל קודקוד u אחר נמצא בתת-פולס p'_u שמקיים

$$p'_u \geq p'_v - \Delta_{subpulse}(\ell) \geq p'_v - O(Diam(G)\cdot k)$$

~~מכך $Time_{subpulse}(\ell) + (O(Diam(G)\cdot k) + k)$~~

מכך $Time_{subpulse}(\ell)(O(Diam(G)\cdot k) + 2k - 1)$ יחידות זמן לכל היותר יגיע u לתת-פולס $p'_v + (2k-1)$, ולכן יגיע לפולס $p_v + 1$.

לכן $Time_{gap}(\ell) \leq Time_{subpulse}(\ell)(O(Diam(G)\cdot k + 2k - 1) =$

$= O(Diam(G)\cdot k)$.

מ.ש.ל!

2. האלגו' של Halperin-Zwick

מבצע BFS החל מקודקוד v כלשהו.
נותן מעגלה מספר רמות, ואת כל הרמות
פרט לאחרונה מכניס למקבץ חדש. ואז
חוזר על התהליך הזה איטרטיבית, בגרף שנותר.

נסתכל על צלע $e=(u,v) \in E$ כלשהי.
נניח בלי הגבלת הכלליות שהקודקוד v מתגלה לפני u
ע"י התהליך הזה. אם v ו-u מגיעים
לאותו מקבץ, אז הצלע e מתגלה
רק ע"י ה-BFS שבונה את המקבץ C.

אחרת הצלע e עשויה להתגלות ע"י
שני ה-BFS-ים, אחד שבונה את המקבץ C_v
($v \in C_v$) ואחד שבונה את המקבץ C_u, $u \in C_u$.

בכל מקרה, כל צלע נסרקת מס' קבוע
של פעמים (פעמיים ע"י כל BFS, ע"י שני
BFS-ים לכל היותר). לכן זמן הריצה הוא $O(|E|)$.

3. ראינו בכיתה שקיימים גרפים עם
$girth(G) \geq k$ ועם $\Omega(n^{1+1/k})$ צלעות.
נראה שלכל חלוקה P של גרף $G=(V,E)$
כזה, או ש- $Rad(P) \geq (\frac{k}{4}-1)$ או ~~שמספר~~
שמס' הצלעות ~~ה~~ בסופר-גרף המושרה ע"י
החלוקה הוא לפחות $\Omega(n^{1+1/k})$.

__הוכחה:__
נניח ~~בשלילה~~ ש $Rad(P) < (\frac{k}{4}-1)$.
כיוון ש $girth(G) \geq k$ אזי לכל מקבץ
$C \in P$, קב' הצלעות $E(C)$ המושרית ע"י
המקבץ היא עץ (חסר-מעגלים).
כמו-כן, נסתכל על זוג מקבצים שכנים
$C, C' \subset P$. נראה שיש ביניהם ~~לכל~~ בדיוק
צלע אחת $e=(v,v') \in E$, $v \in C, v' \in C'$.
אכן, אם היו ביניהם שתי צלעות
$e=(v,v'), e'=(u,u')$ אזי המעגל המורכב מעץ הפורש
T של C, העץ הפורש T' של C', ושתי
הצלעות e, e', ארכו של המעגל הנ"ל הוא
$< (\frac{k}{4}-1)\cdot 4 + 2$
$= k-2.$
וזאת בסתירה לכך ש $girth(G) \geq k$.

כיוון שלכל מקבץ $C \in \mathcal{P}$
הקב' $E(C)$ הנה חסרת מעגלים,
אזי $\left|\bigcup_{C \in \mathcal{P}} E(C)\right| \le n-1$.

לכן קב' הצלעות H החוצות בין המקבצים השונים של החלוקה $\mathcal{P}$ מכילה

$$\Omega(n^{1+1/k}) - (n-1) = \Omega(n^{1+1/k})$$

צלעות.

כמו-כן, כל סופר-צלע (C, C') של הסופר-גרף $\hat{G}(\mathcal{P})$ המושרה ע"י החלוקה $\mathcal{P}$ ממומשת ע"י צלע אחת בדיוק של H.

לכן מס' הסופר-צלעות $|\hat{E}|$ ב-$\hat{G}$ שווה בדיוק ל-$|H|$. ולכן מס' הסופר-צלעות ב-$\hat{G}$ הוא

$$|\hat{E}| = |H| = \Omega(n^{1+1/k})$$

מ.ש.ל.

4. במקרה הכללי:

ניקח n קודקודים $v_1, \ldots, v_n$

ולכל זוג $i \neq j$, $i, j \in [n]$ של אינדקסים

נכניס צלע (v_i, v_j) לגרף בהסתברות

$\frac{n^{1/k}}{n} = p$, באופן בלתי ~~תלוי~~ מהבחירות האחרות.

כפי שהראינו בכיתה, בגרף שמתקבל

יש $\Theta(n^{1+1/k})$ צלעות ולכל היותר n/k

מעגלים ~~בהסתברות גבוהה~~. באורך $< k$

בהסתברות גבוהה.

נמחק את המעגלים הנ"ל, ונמחק מכל מעגל

צלע אחת. הגרף שמתקבל עומד, בהסתברות

גבוהה, בדרישות השאלה.

הסתברות ההצלחה שלו היא הסתברות ([illegible]) $1 - \frac{1}{\ldots}$

בדיוק כמו שניתחנו בכיתה.

זמן הריצה: בניית הגרף הראשוני דורש $O(n^2)$

זמן מציאת n/k מעגלים דורש סריקת BFS

לעומק $k/2$ מכל קודקוד בגרף הראשוני.

בגרף הזה יש $O(n^{1+1/k})$ צלעות, בהסתברות גבוהה.

לכן n סריקות BFS כן דורשות בסה"כ

$O(n^{2+1/k})$ צלעות בהסתברות גבוהה.