פתרון לתרגיל 1 בגרפים

מכוונים.

1. א. נתונים קשת מכוונת $\langle u,v \rangle$
לבדוק אם u קיבל את הודעת
ה-Flooding בפעם הראשונה מ-v.
הצלעות שהאלג' מכניס לתת-הגרף הן
בדיוק הצלעות האלה, אך האלג' מכניס
צלעות שאינן מכוונות.
נראה שבגרסה המכוונת בעיה אין
מעגלים עקביים ומעגלים לא עקביים.
(מעגלים משני סוגים אלו הוגדרו בכיתה.)
במעגל לא עקבי יש בהכרח קודקוד
~~שאליו~~ שממנו יוצאות שתי קשתות, ויש קודקוד
שאליו נכנסות שתי קשתות.
אבל אז יש קודקוד v שאליו נכנסות
שתי קשתות $\langle v,x \rangle$,$\langle v,y \rangle$ ולכן v
קיבל את ההודעה לראשונה גם מ-x וגם מ-y
סתירה.
נניח בדרך השלילה שקיים מעגל עקבי
$\langle v_0, v_1, \ldots, v_t, v_0 \rangle$
בתת-הגרף.
אזי v_1 קיבל את ההודעה בפעם הראשונה
מ-v_0, v_2 קיבל אותה בפעם הראשונה מ-v_1,
..., v_0 קיבל אותה בפעם הראשונה מ-v_t.
במילים אחרות, v_1 קיבל את ההודעה אחרי
v_0, v_2 אחרי v_1, ..., v_0 אחרי v_t.

אבל מכיון ש פט קיבל את ההודעה להרשמה
אחרי ש-פט קיבל את ההודעה להרשמה,
סתירה!

מ.ש.ל.

ב. בקומה לספוק 1/2.

2.ט) מ"ד, מתבצעת עומק הסריקה

ב: בשלב של $\check{L}(v)$.

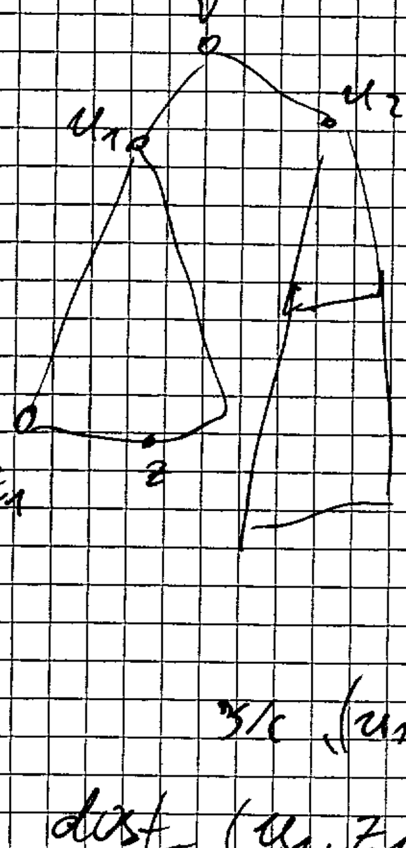
בסיס: ✓

שלב: v הוא קודקוד פנימי.

יהיו $u_1, \dots, u_k$ בנים של v.

אז $\check{L}(v) = \max_{1 \le i \le k} \{\check{L}(u_i)\} + 1$.

נניח בה"כ $\check{L}(u_1) = \max_{1 \le i \le k} \{\check{L}(u_i)\}$.



אז $\check{L}(v) = \check{L}(u_1) + 1$.

~~יהי נראה ש z_1 הוא העלה~~

יהי z_1 העלה בתת-העץ המושרש ב-u_1 שהכי קרוב ל-u_1, דהיינו

$\check{L}(u_1) = dist_T(u_1, z_1)$.

נראה ש-z_1 הוא העלה הכי קרוב ב-T_v של v.

יהי z עלה אחר.

אם $z \in T_{u_1}$ (תת-העץ של u_1), אז

$$dist_T(u_1, z_1) \le dist_T(u_1, z)$$

$$\Rightarrow dist_T(v, z_1) = dist_T(u_1, z_1) + 1 \le dist_T(u_1, z) + 1 = dist_T(v, z).$$

אם z הוא עלה בעומק ℓ ב- T_{u_i}

כך ש- u_i בן $i+1$ של v אז: יהי z_i

העלה הכי קרוב של u_i ב- T_{u_i}.

אז $dist_T(u_i, z) \geq dist_T(u_i, z_i) = \check{L}(u_i)$

אבל $\check{L}(u_i) \geq \check{L}(u_1)$.

לכן $dist_T(u_i, z) \geq \check{L}(u_1) = dist_T(u_1, z_1)$

$$\Rightarrow dist_T(v, z) = dist_T(u_i, z) + 1 \geq dist_T(u_1, z_1) + 1 = dist_T(v, z_1).$$

מ.ש.ל.

ג) נוכיח באינד' על i, $i=1,2,\ldots,k$,
שאחרי $t+i+1$ י.ז. יש ב-w לפחות
i פריטים שנשלחו מ-v.

<u>הוכחה</u>

<u>בסיס:</u> $i=1$.

בזמן $t+1$ היה ל-v פריט אחד לפחות.
אם הקו (בין v ל-w) היה פנוי אז
v שלח פריט אחד עד הזמן $t+1$.
אם הקו היה תפוס צ"ל ש-v שלח קודם
לכן לפחות פריט אחד אף קודם לכן.
בכל מקרה הפריט מגיע אל w עד הזמן $t+2$.

<u>שלב:</u>

אחרי זמן $i+t$, לפי הנחת האינד', יש
ב-w לפחות $(i-1)$ פריטים שהגיעו מ-v.
כמו-כן, לפי הנחת הש', יש ב-v באותו זמן
לפחות i פריטים. לכן או שב-w יש
כבר i פריטים כנ"ל, ואז סיימנו.
או שיש ל-w בדיוק $(i-1)$ פריטים, ואז
יש ~~ל-v~~ פריט אחד לפחות של v שעוד
לא הגיע ל-w. הפריט הזה נשלח אל w
בזמן $i+t$ או לפני, ולכן הוא מגיע אליו
בזמן $1+i+t$ או לפני. מ.ש.ל.

4) נוכיח שבעץ T_d ~~שנבנה~~ שנבנה אחרי
d יט' מכיל עץ פורש BFS עבור
$\hat{T}_d(root)$ המושרש ב-root.
הט' שצריך להוכיח נובעת מהט' הבאה
<u>הוכחה באינד'</u> על d.
<u>בסיס:</u> $d=0$ ✓
<u>צעד:</u> לפי הנחת האינד', בעץ T_{d-1} מכיל
עץ BFS עבור $\hat{T}_{d-1}(root)$.
נסתכל על $v \in \hat{T}_d(root)$.
יהי $u \in \hat{T}_{d-1}(root)$, שכן של v.
נסתכל על נק' הזמן באיטרציה $\geq (d-1)$
שבה $l(u)$ קבוע, כשזה קורה, לפי אחת מהטענות
הקודמות, $l(u)$ הופך ל-$(d-1)$, ו-u שולח הודעות
עדכון לכל שכניו, ובפרט ל-v.
אז ש-v (כתוצאה מזה) מעדכן את $l(v)$
ל-d ובוחר את u להיות אביו, או שקיים
$u' \in \hat{T}_{d-1}(root)$, $u' \neq u$ שבחר קודם
להיות אביו של v. בה"כ נניח שאביו
הוא u. אזי בעץ T_d יש מסילה בין
root ל-v שמורכבת מהמסילה P_u ב-T_{d-1}
בין root ל-u (שאורכה $d-1$, לפי הנחת
האינד') ומן הצלע (v,u). אורך מסילה זו
הוא לפי־כך d. לכן
$$dist_G(root,v) = dist_{T_d}(root,v) = d$$
מ.ש.ל.