פתרון מועד א'
באלג' מבוזרים, שנת תש"ע

1) א. כל קודקוד v מכוון את הצלעות (u,v) שסמוכות לו לפי ה-Id של v ו-u.
ספציפית, הצלעות מכוונות מה-Id יותר קטן אל ה-Id יותר גדול.
בגרף המכוון שמתקבל, לכל קודקוד יש דרגה יוצאת לכל היותר Δ.
עתה, כל קודקוד v במקביל ממספר את הצלעות היוצאות שלו מ 1 עד Δ, בסדר שרירותי.
זה משלים את האלג'.
הוא דורש סיבוב אחד - כל קודקוד שולח את ה-Id שלו לכל שכניו, ועל-סמך המידע הזה עובד המשך האלג'.
היערות מוגדרים לפי מספרי הצלעות.
הצלעות עם מספר 1 מרכיבות את היער הראשון,
" " " 2 " " " השני,
וכך הלאה.
כל הצלעות מכוסות ע"י אוסף היערות.
כמו-כן באף אחד מן היערות אין מעגלים מכוונים, כי הצלעות מכוונות מ Id קטן יותר אל Id גדול יותר.
כמו-כן אין מעגלים לא מכוונים כי בכל יער לכל קודקוד יש דרגה יוצאת 1 לכל היותר, וכו' אין מעגלים מכוונים. (לכן אם יש מעגל לא מכוון אזי יש בו קודקוד עם דרגה יוצאת שתיים, סתירה.)

מ.ש.ל.!

ב: טענה: בגרף G בן n קודקודים עם $arb(G)=a$

קיימים לפחות $\frac{n}{3\sqrt{a}}$ קודקודים שלכ"א מהם

יש דרגה לכל היותר $\cancel{2a}\,(2+\frac{1}{\sqrt{a}})\cdot a$

הוכחה

נניח בשלילה שיש פחות מ- $\frac{n}{3\sqrt{a}}$ קודקודים

עם דרגה $\geq (2+\frac{1}{\sqrt{a}})\cdot a$.

אזי יש לפחות $(1-\frac{1}{3\sqrt{a}})\,n$ קודקודים

שלכ"א מהם דרגה גדולה יותר מ $(2+\frac{1}{\sqrt{a}})a$.

הקודקודים הנ"ל משרים יותר צלעות מאשר

$$\frac{1}{2}(2+\frac{1}{\sqrt{a}})\cdot a\cdot(1-\frac{1}{3\sqrt{a}})\cdot n \geq na.$$

מאידך, בגרף בעל יערות a, כמות הצלעות $|E|$ מקיימת

$$\left\lceil \frac{|E|}{n-1} \right\rceil \leq a$$

$$\Rightarrow |E| \leq a\cdot(n-1)$$

סתירה. מ.ש.ל.

נבנה H-פירוק עם דרגה $(2+\frac{1}{\sqrt{a}})a$.

כמות הקבוצות ה-H ב-H-פירוק היא ℓ כך ש

$$n\cdot(1-\frac{1}{3\sqrt{a}})^{\ell} \leq 1$$

$$\cancel{\Rightarrow (3\sqrt{a})^{\ell} \geq n} \Rightarrow \ell \approx O(\sqrt{a}\cdot\log n)$$

כ"א מקב' ה-H משרה גרף עם דרגה מקסימלית

Q: $(2+\frac{1}{\sqrt{Q}})$. נצבע אותם במקביל ב $(2+\frac{1}{\sqrt{Q}})\cdot Q+1$

צבעים. הצבע הזה ניתן לביצוע

תוך $O(Q+\log^* n)$ זמן (כפי שלמדנו (*)

בכיתה תוך $O(Q^2+\log^* n)$ זמן.)

עכשיו שילוב של הצביעות האלה לכדי

$((2+\frac{1}{\sqrt{Q}})\cdot Q+1)$-צביעה של הגרף כולו

דורש זמן $O(Q\cdot \ell)$, בטכניקה שלמדנו בכיתה.

כיוון ש $\ell=O(\sqrt{Q}\cdot\log n)$, הזמן הכולל הוא

$O(Q^{3/2}\cdot\log n)$.

(או אם הצבע (*) דרש $O(Q^2+\log^* n)$ זמן,

אז זה $O(Q^{3/2}\cdot\log n+Q^2)$.)

2) א. עבור l, $l \le k$, מספר המעגלים באורך l
בגרף מלא בן n קודקודים הוא מספר
האפשרויות לבחור l קודקודים מתוך n
עם חשיבות לסדר, עד-כדי פרמוטציות
מעגליות. דהיינו, זה

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(l-1))}{l} \le n^{l} .$$

כל מעגל כזה הוא בן l צלעות, ולכן
ההסתברות שלו לשרוד היא $\frac{n^{l/k}}{n^{l}}$.
לכן תוחלת מס' המעגלים באורך l ששורדים
היא $n^{l/k}$.
סה"כ מס' המעגלים באורך $l \le k$ ששורדים
הוא משתנה מקרי בעל תוחלת

$$n^{3/k}+n^{4/k}+\ldots+n^{k/k} \le 2n .$$

תוחלת מס' הצלעות ששורדות היא $\Theta(n^{1+1/k})$.
ספציפית $\binom{n}{2}\cdot\frac{n^{1/k}}{n} \approx \frac{n^{1+1/k}}{2}$.

ב. לפי אי-שוויון מרקוב, ההסתברות שמס' המעגלים
הנ"ל יהיה גדול מ $20\cdot n$ היא קטנה או שווה
ל $\frac{1}{10}$. ~~כמובן, ההסתברות~~

ג. מותן (girth) הוא אורך המעגל הכי קצר בגרף.

9. ההסתברות שבגרף שלנו יש פחות מ $\frac{n^{1+1/k}}{20}$ צלעות היא $\le \frac{1}{10}$.

כמו-כן ההסתברות שיש בו יותר מ-$20n$ מעגלים באורך k או פחות היא $\le \frac{1}{10}$.

לכן בהסתברות לפחות $\frac{4}{5}$ בגרף שלנו יש $\le 20n$ מעגלים באורך k או פחות, ולפחות $\frac{n^{1+1/k}}{20}$ צלעות.

עתה נמחק צלע אחת מכל מעגל שכזה (באורך $\le k$).
נשארנו עם גרף בעל מותן $k+1$ לפחות ועם מס' צלעות $\ge \frac{n^{1+1/k}}{20} - 20n =$
$= \Omega(n^{1+1/k})$.

(האי-שוויון האחרון נכון עבור k קבוע, ובהסתברות לפחות $4/5$.)

3 א. כן.

הוכחה

יהי T ה MST של G, ו-T' - ה MBT.

כיוון ש T איננו ה-MBT, אזי הצלע ש

הכי כבדה ב T כבדה יותר מכל הצלעות של T'.

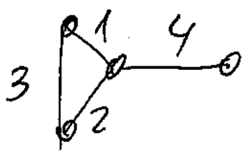
אך יש סוגרת מעגל עם הצלעות של T'.

לפי הכלל האדום היא אינה ב MST. סתירה.

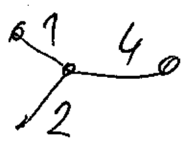
מ.ש.ל.

ב. לא

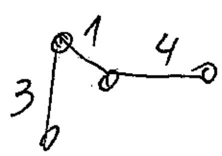
G



T''



T'



בעץ T' צוואר הבקבוק (הצלע הכי כבדה)

היא צלע במשקל 4. בכל עץ פורש של גרף

הצלע 4 מוכרחת, והיא הצלע הכי כבדה בגרף,

ולכן בעץ. לכן T' הינו ה-MBT.

יחד עם זאת הוא איננו MST.

ג. הכלל האדום: צלע הכי כבדה במעגל כלשהו

איננו ב MST.

הכלל הכחול: צלע יוצאת הכי קלה של

הפרגמנט שייכת ל MST.

3.ד. נלמד בכיתה.

3.ה. יהיה עדיין $O(n)$. העובדה ש~~ה~~קוטר קטן אינה עוזרת. זאת מכיוון שעשינו Pipelined Convergecast של $n-1$ צלעות העץ MST על-גבי עץ עצמו. הפעולה הזאת דורשת $O(n)$ זמן בלי קשר לקוטר של עץ הגרף.

4) א. $\mathcal{L}$; B שלמדנו בשיעורים,
סוף וסוף, ו-B [illegible] בתרגילים
(דוגמא, גם בשיעורים).
סוף מבוסס על partition
וסוף על כיסוי.

ב. נלמד בכיתה.

ג. " "

ד. ~~Flood($\mathcal{L}$) אפשר לבנות~~.
$\mathcal{L}$(Flood) הינו תקין (אפשר להפעיל את $\mathcal{L}$ על ההצפה)
B(Flood) הינו בעייתי, כי ~~הא~~ האיתחול של B דורש את BFS.
כדי לפתור את הבעיה אפשר להשתמש בDFS במקום BFS ולהריץ עליו את המסונכרן B. את המסונכרן B' שמתקבל אפשר להפעיל על ההצפה
נימוק של $\mathcal{L}$(Flood) ; B'(Flood)
נעשה ~~בב~~ בכיתה.