בפיתרון לתרגיל 4, תשס"ט

① ב. קליקה בת $2a$ קודקודים. היערוּת שלה שווה ל
$$\left\lceil \frac{2a\cdot(2a-1)}{2\cdot(2a)} \right\rceil = \left\lceil a - \frac{1}{2} \right\rceil = a$$
ומס' הצביעה שווה ל- $2a$.

א. טענה: בהכרח קיים קודקוד שדרגתו $\leq 2a-1$.

הוכחה: אחרת, הדרגה של כל הקודקודים היא לפחות $2a$. אזי

$$2\cdot|E| = \sum_{v\in V} deg(v) \geq 2a\cdot n,$$
$$a \leq \frac{|E|}{n}.$$

לעומת זאת

$$a = \max\left\{\left\lceil\frac{|E(U)|}{|U|-1}\right\rceil : |U|\geq 2,\ U\subseteq V\right\} \geq$$
$$\geq \left\lceil\frac{|E|}{n-1}\right\rceil$$
$$\Rightarrow \frac{|E|}{n} \geq a \geq \left\lceil\frac{|E|}{n-1}\right\rceil \geq \frac{|E|}{n-1}$$
$$\Rightarrow n-1 \geq n \Rightarrow -1 \geq 0 \Rightarrow\Leftarrow$$
(סתירה)

מ.ש.ל.!

נבנה סדרת קודקודים
$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = V$$
כך שלכל i, $1\leq i\leq n$,
מס' השכנים שיש ל v_i מתוך $\{v_1,\ldots,v_{i-1}\}$

הוא לכל היותר $2a-1$.
עתה נצבע קודקוד-קודקוד באמצעות
פלטה של $2a$ צבעים.
את v_1 נצבע בצבע שרירותי.
אם צבענו את $v_1, \dots, v_{i-1}$ אז בבואנו
לצבוע את v_i, יש לכל היותר $2a-1$
צבעים אסורים עבורו, ולכן יש בהכרח צבע
פנוי.
לכן התהליך הנ"ל צובע את הגרף ב-$2a$
צבעים. מ.ש.ל!

כדי לפרק את הגרף ל-$(2a-1)$ יערות,
כל קודקוד v_i משייך את $\le (2a-1)$
הצלעות שמחברות אותו לקודקודים עם
~~הכי~~ אינדקס קטן יותר ל $\le (2a-1)$ יערות,
אחת לכל, בבחירה שרירותית.
הטיעונים שראינו בכיתה מראים שמתקבלים
יערות.

ג. אותו דבר כמו בסעיף א', אבל עתה
יהיה לנו כבר סדר קבוע של קודקודים
בדרגה $\ge 2a$.
ספציפית, נניח ש-B הוא שבר הקודקודים
עם דרגה לפחות $2a+1$. אזי

$$B\cdot n\cdot(2a+1) \le \sum_{v\in U} deg(v) \le 2\cdot|E| \le 2\cdot a\cdot n$$

$$\Rightarrow B \le \frac{2a}{2a+1}$$

קב' הקודקודים עם דרגה לפחות $2a+1$

לפי-רק לפחות שבר $\frac{1}{2a+1}$ של כל
הקודקודים הם בעלי דרגה $2a$ או פחות.
נפרק את קבוצת הקודקודים לקבוצות
$H_1, \ldots, H_\ell$
כמו שעשינו בכיתה.
כדי להעריך את ℓ נכתוב

$$n\left(1-\frac{1}{2a+1}\right)^{\ell} \le 1$$

$$\Rightarrow \ell \ge \frac{\log n}{\log\left(1+\frac{1}{2a}\right)}$$

ומכאן $\ell = O(a \cdot \log n)$,
כיוון ש $\log\left(1+\frac{1}{2a}\right) = \Theta\left(\frac{1}{a}\right)$.
לכן חישוב הפירוק הזה ידרוש $O(a \cdot \log n)$ זמן.
עתה כדי לחשב פירוק ל-$2a$ יערות,
כל קודקוד ב-H_i ~~יכוון~~ יש"ך את כל הצלעות
הסמוכות לו ושהקצה השני שלהם שייך ל-H_j,
עבור $j > i$ או $j = i$ אבל בעל Id קטן
יותר: הוא "משייך" את $\le 2a$ הצלעות
הנ"ל לכל היותר $2a$ יערות שונים,
צלע אחת ליער.
לפי הטיעונים שראינו בכיתה, מתקבל פירוק
ל-$\le 2a$ יערות זרים בצלעות שמכסים
את כל הגרף.

כדי לקבל $(2a+1)$-צביעה, נפעיל שוב אלג' שלמדנו בכיתה לשבירת במקביל כל H_i ב-$(2a+1)$ צבעים ואז עושה צביעה מחדש, החל מ-H_1, אח"כ H_2, וכך הלאה.
כיוון שהאלג' מבצע ~~יחידת זמן~~ סיבוב לכל קבוצת צבע של כ"א מה-H_i-ים, הרי שזמן הריצה שלו הוא ~~$O(\ell$~~

$$\leq \ell\cdot(2a+1) = O(a^2\cdot\log n).$$

(2) קודקודי MIS מקבלים צבע 1. הקודקודים השכנים לקודקודי MIS שהם שכנים בכיוון השעון מקבלים צבע 2. הקודקודים שלא נצבעו לא ב-1 ולא ב-2 מקבלים צבע 3. קל לראות שאפשר לממש זאת ב ≤ 3 סיבובים, ושהצביעה חוקית.

(3) הפעל את האלג' של Cole-Vishkin 12 פעמים. נקבל כ-$\log^{(12)} n$ צבעים.

(4) ראו פתרון לשאלה 6 במועד ב' של Feb. 2005.