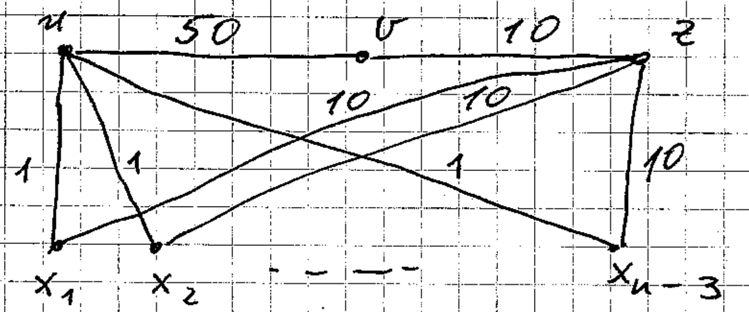
פתרון למועד ב'
באלג'ים מבוזרים, המבחן של 1/5/2009

1. א. הטענה איננה נכונה.
קיימים גרפים שעבורם עץ ה-MBT
(אחד מעצי ה-MBT) איננו עץ ה-MST.
דוגמא:



$V = \{u, v, z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}\}$

$\cancel{E = \{(u,v), (v,z), (v,x_1), \ldots}$

$E = \{(u,v), (v,z), (u,x_1), (u,x_2), \ldots, (u,x_{n-3}),$
$(z,x_1), (z,x_2), \ldots, (z,x_{n-3})\}$

$w((u,v)) = 50,$

$w((v,z)) = 10,$

$w((u,x_i)) = 1 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n-3\},$

$w((z,x_i)) = 10 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n-3\}.$

ה-MST של הגרף מכיל את הצלעות
$(u,x_i) \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n-3\},$
$\cancel{(z,x_i)}$ וגם את הצלעות (v,z)
ו- (z,x_1).

$w(MST) = 1\cdot(n-3) + 2\cdot 10$

לדוגמה זאת, אחד ה-MBT-ים הוא

$$T' = \{(v,z),(z,x_1),(z,x_2),\dots,(z,x_{n-3}),(u,x_1)\}$$

שמשקלו הוא

$$10\cdot(n-2)+1.$$

עבור n מספיק גדול

$$10(n-2)+1 = \underbrace{w(MBT)}_{w(T')} > w(MST) = n-3+2\cdot 10.$$

לדוגמה זאת, נכונה הטענה ש-MST של גרף הוא תמיד ה-MBT שלו.

הוכחה

יהי T ה-MST ונניח בשלילה שקיים עץ אחר T' כך שבו המשקל של הכי כבדה ב-T' הוא קטן יותר מהמשקל של הכי כבדה ב-T.
(אם MST הוא איננו MBT אז בהכרח קיים MBT שמקיים את הטענה לעיל.)

דהיינו, $w(e) > w(e')$.

לפי-כך, $e \notin T'$. (כי אחרת יש סתירה לכך ש-e' הוא המשקל הכי כבדה ב-T'.)

לכן קשת ש T' מכילה מעגל שבו e הוא המשקל הכי כבדה.

קבלנו סתירה לכלל המעגל שאומר שצלע ב-MST (ו-e הוא צלע ב-MST) איננה יכולה להיות הצלע הכי כבדה באף מעגל.

מ.ש.ל!

1.ב. הטענה נכונה.

<u>הוכחה</u>

נפעיל במקביל אלג' PRIM בגרף
המקורי $G=(V,E,w)$ ובגרף
הריבועי $G^{(2)}=(V,E,w^{(2)})$, כאשר
$w^{(2)}$ היא פונק' משקל המוגדרת כ
$w^{(2)}(u,v)=(w(u,v))^2$
לכל צלע $(u,v) \in E$.
נפעיל את האלג' מאותו קודקוד v.
בריצה ב-G האלג' כל פעם יצרף ל-MST
את הצלע הכי קלה שיוצאת מהפרגמנט;
בריצה ב-G' האלג' כל פעם יצרף לעץ
את הצלע שריבוע המשקל שלה הכי קטן
מבין כל הצלעות שיוצאות מהפרגמנט.
אבל זאת אותה הצלע.

מ.ש.ל!

2. השאלה נלמדה בכיתה.

נחלק את הגרף G ל- $O(\log n)$
תתי-גרפים, $G_1, G_2, \ldots, G_{\log(n^{12})}$,
כך שלכל i, $i=1,2,\ldots,\log n^{12}$,
G_i הוא ~~תת~~ תת-הגרף שמכיל צלעות
במשקל בטווח $[w_{min}\cdot 2^{i-1}, w_{min}\cdot 2^{i})$,
כאשר w_{min} הוא המשקל הקטן ביותר.
כאשר מחשבים 7-פורש של גרף
לא ממושקל על גרף שמשקלותיו הם
עד-כדי פקטור 2 שונים זמ"ז, מקבלים
$7\cdot 2=14$ -פורש.
(כי לכל צלע $e=(u,v)$ מקורית יהיה בפורש
מסלול ~~בן~~ בן 7 צלעות לכל היותר,
שכ"א מהן היא במשקל לכל היותר גדול
פי 2 מהמשקל של e.)
כמות הצלעות בכ"א מן הפורשים הנ"ל
היא $O(n^{5/4})$, וכיוון שיש $O(\log n)$ פורשים
הרי שסה"כ מס' הצלעות הוא $O(n^{5/4}\cdot\log n)$.
כל $O(\log n)$ הפורשים מחושבים במקביל,
ולכן ~~לא הזמן~~ זמן הריצה לא עולה.

כדי לסכם את כמות ההודעות,

נסמן ב E_i את ~~כל~~ קב' הקשתות

בתת-הגרף G_i. מס' ההודעות הנשלחות

ע"י האלג' שרץ על G_i הוא $O(|E_i|)$.

לכן סה"כ מס' ההודעות הנשלחות ע"י

האלג' הוא

$$\sum_{i=1}^{\log n} O(|E_i|) = O(|E|)$$

מ.ש.ל.

4. א. כל קודקוד v מש"ך את $\geq \Delta$
בצלעות הסמוכות לו והמקשרות אותו
לקודקודים עם Id גדול יותר
לצבע הזה $\geq \Delta$ יערות שונים.
(הוא נותן לכל צלע צבע בין 1 ל-Δ.
קל לראות שקב' כל הצלעות הצבועות
בצבע שנתון מהווה יער.)
הדבר הנ"ל מתבצע מקומית ודורש סיבוב
תקשורת אחד. (כדי ללמוד את ה-Ids של
השכנים.)

ב. ממשפט Nash-Williams
$arb(G)$ זה מס' היערות המינימלי
שאליו אפשר לפרק את G.
כיון שבסעיף א' ראינו שאפשר לפרק את G
ל-$\Delta(G)$ יערות, הרי ש $arb(G) \leq \Delta(G)$.

ג. נצבע במקביל כל יער ב-3 צבעים
ב $O(\log^* n)$ זמן, ונשלב את הצביעות
לכדי 3^{Δ}-צביעה בצורה סטנדרטית
(שלמדנו בכיתה) ב-O זמן.

5. ראה פיתרון של שאלה 6 של מועד ב
של שנה 2005.