פיתרון במבחן

מועד ב'

25/12/05

1) אלג' Bellman-Ford.

השינוי היחיד שצריך לעשות את
הערכת המרחק העדכנית עם
ההערכה שמקבלים בפונקציה
ועוד משקל הצלע על-ידו, מתקבלת
הפונקציה.

<u>זמן ריצה:</u> $O(n)$.

<u>תקשורת:</u> כיוון שכל צומת עשוי
לעדכן את הערכת המרחק שלו
לכל היותר $n\cdot f(n)$ פעמים
(שכן אורכי המסלול האפשריים
הן בתחום $\{n\cdot f(n), \ldots, 2, 1\}$).
על-כן כמות ההודעות היא

$$\sum_{v\in V} deg(v)\cdot O(f(n)\cdot n) = O(|E|\cdot n\cdot f(n))$$

2. ⓐ האלג' הוא:

v מפעיל לפעול בסיבוב $\hat{l}(v)+1$.

הוא מעדכן את $d_v \to \tilde{d}_v$.

B סוף $\tilde{d}_v \le 1$ (כלומר יש אסימונים

מיותרים ברב-הצד T_v) וכמות

האסימונים במצב ידי v גדולה

או שווה ל-2, אחד אסימון לשכנו.

כמו-כן הוא מעדכן את $\tilde{d}_v$ (מוסיף לו 1).

<u>טענה</u>: בסיום האלג', לכל $v \in V$, $\tilde{d}_v \ge 0$.

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה שקיים $v \in V$

שמקיים $\tilde{d}_v = n_v - \tilde{k}_v \le -1$,

כאשר $\tilde{k}_v$ הוא כמות האסימונים ב-T_v

בשלב הבא. דהיינו $n_v \le \tilde{k}_v - 1$,

$\tilde{k}_v \ge n_v + 1$.

יהי $\tilde{l}_v$ כמות אסימונים ב-v בשלב הבא.

אם v הוא <u>עלה</u> אזי ~~$\tilde{k}_v = \tilde{l}_v \ge 2$~~

ולכן v ה"ב שולח אסימון לשכנו,

סתירה.

אחרת

$$.\tilde{k}_v = \tilde{l}_v + \sum_{w \in Ch(v)} \tilde{k}_w$$

אם $\tilde{l}_v \geq 2$ אזי השיקול הקודם מביא לסתירה.

אחרת, $\tilde{l}_v \leq 1$, וזה גורר

$$\tilde{d}_v = n_v - \tilde{k}_v = (1 - \tilde{l}_v) + \sum_{w \in Ch(v)} (n_w - \tilde{k}_w) =$$

$$= (1 - \tilde{l}_v) + \sum_{w \in Ch(v)} \tilde{d}_w \leq -1$$

$$\Rightarrow \sum_{w \in Ch(v)} \tilde{d}_w \leq \tilde{l}_v - 2 \leq -1.$$

לכן קיים בן $w \in Ch(v)$ שמקיים

$\tilde{d}_w \leq -1$,

לכן אפשר להפעיל את השיקול הנ"ל עם הבן w. בצורה הזאת נבנה סדרת צמתים $v = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_r$,

כאשר v_{i+1} הוא בנו של v_i, ו-v_r

הואיל וזה עלה אז מקיים $\tilde{l}_{v_u} \geq 2$,
וכן הצמתים הנ"ל מקיימים $\tilde{d}_{v_i} \leq -1$.
בשני המקרים מגיעים את השיקול
הקודם של v_u ומגיעים לסתירה.

מ.ש.ל.

(ב) טענה: $\tilde{l}_v = 1+\left(\sum_{w\in Ch(v)} \tilde{d}_w\right) - \tilde{d}_v$.

הוכחה

$$1+\sum_{w\in Ch(v)} \tilde{d}_w - \tilde{d}_v =$$

$$= 1 + \left(\tilde{k}_v - \sum_w \tilde{k}_w\right) - \left(n_v - \sum_w n(w)\right) =$$

$$= 1 + \tilde{l}_v - 1 = \tilde{l}_v .$$

מ.ש.ל.

3) נסתכל על צומת $v \in V$,
ועל הרגע הראשון x שבו v
מעלה את משתנה הדופק P_v שלו ל-n,
עבור n שלם חיובי n כלשהו.
לכל ~~צומת~~ צומת $w \in V$, מתקיים

$$P_w(x) \geq P_v(x) - \Delta_{max}.$$

לפי הגדרת $Timepulse(\eta)$, אחרי
$Timepulse(\eta)$ יחידות (מקסימליות) של זמן
יתקיים שלכל $w \in V$,

$$P_w(x) \geq P_v(x) - \Delta_{max} + 1,$$

ואחרי $Timepulse(\eta)\cdot(\Delta_{max})$ יחידות ~~זמן~~
~~זה~~ יתקיים שלכל $w \in V$,

$$P_w(x) \geq P_v(x).$$

בפרט, לכל שכן w של v יתקיים
אחרי $Timepulse(\eta)\cdot\Delta_{max}$ יחידות זמן ?

$$P_w(x) \geq P_v(x).$$

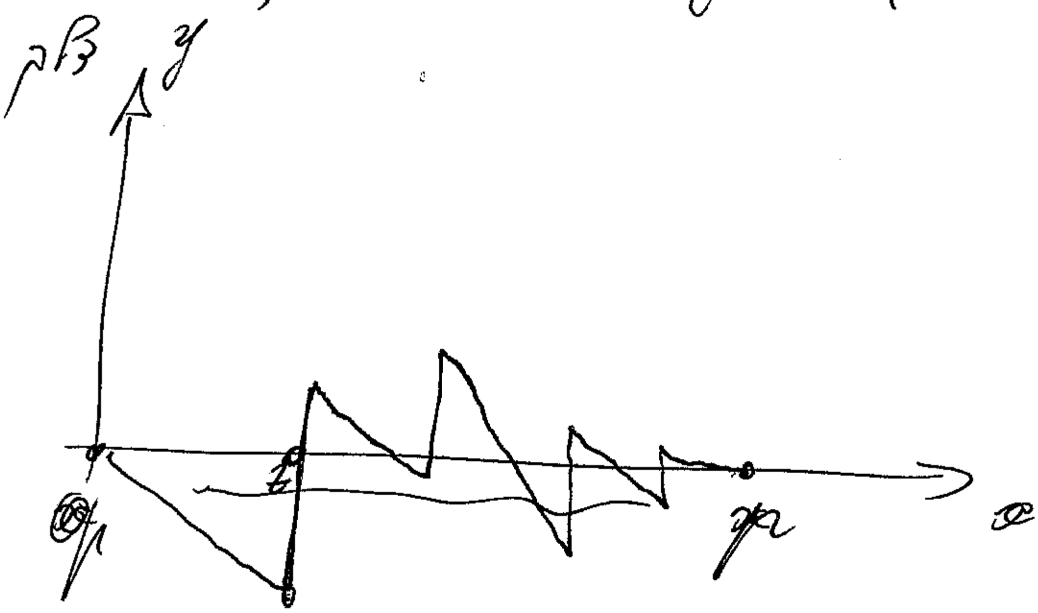
לכן, לפי הגדרת $Timepulse(\eta)$, אחרי $Timepulse(\eta)$
יחידות זמן נוספות יעלה v את הפולס שלו
ל $P_v(x)+1 = n+1$.

מ.ש.ל.

ט) טענה: כמעט קיימת נקודה כנ"ל.

הוכחה

תהי ~~נק'~~ נקודה שרירותית על המעגל.
נשים את המכונית ב-~~...~~ ונסע איתה
בכיוון שרירותי, כאשר מניחים (רק לצורך
הדיון) שאפשר לנסוע בלי דלק.
נצייר את גרף ~~...~~ של כמות
הדלק של המכונית ~~...~~ לכל נק' ב-x
יש לנו את הנקודה שבה נמצאת
המכונית, ועל ציר ה-y - כמות הדלק.
כשמכונית אין דלק היא נכנסת
"אוברדראפט" ~~...~~ וכמות הדלק בה נ"ת
שלילית.



כשהמכונית "נוסעת עקב דלק" כמות
הדלק שבה ~~מתבזבזת~~ מבזבזת תהיה זהה לכמות
הדלק שהיא הייתה ~~[illegible]~~ מבזבזת לו היה
לה הדלק הנדרש.

נסתכל על גרף הפונקציה.

ברור שבתנאים הסבירים המכונית מגיעה
לבית עם אותה כמות הדלק שהיה
בתחלה במכונית עד הסבוב.

~~[illegible]~~ לכן הגרף מתחיל מערך ע שוה
ל-0 ונגמר בערך ע שוה ל-0.
הפונקציה היא פונקציה רציפה בקטע סגור,
ועל-כן היא מקבלת בו מינימום ומקסימום.

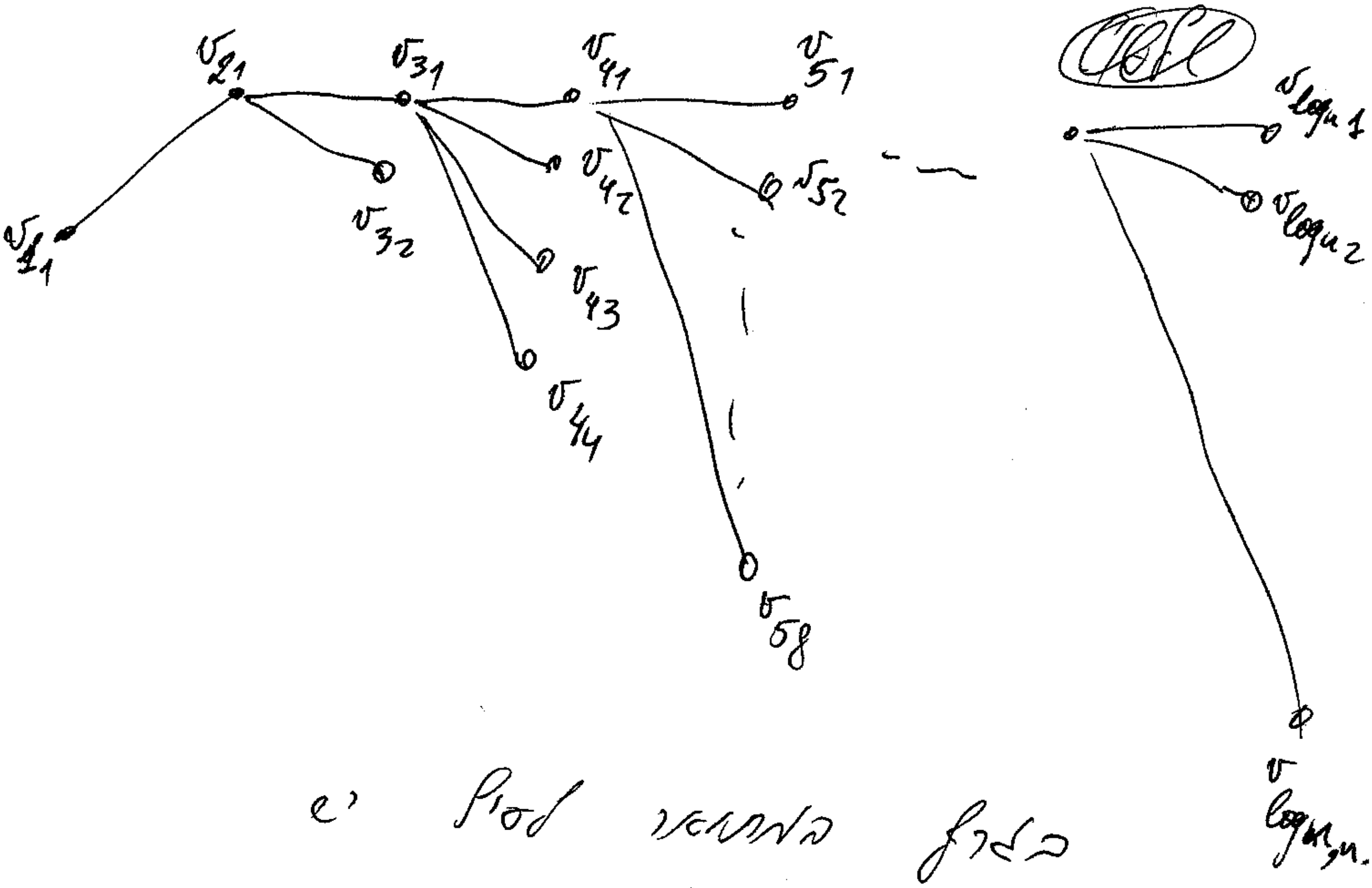
תהי ג נקודת המינימום.
אם הערך של כמות הדלק ב-ג הוא
גדול או שוה ל-0, אז גמרנו (אז
ג היא הנקודה שאת קיומה אנו מחפשים).
אחרת, ~~[illegible]~~ כמות הדלק ב-ג,
ע(ג) בגרף שלנו היא שלילית, פרושו אם נתחיל
מ-ג את הסבוב (במקום את האוטו
ב-ג מלכתחילה, אז בכל נקודה במעגל
כמות הדלק תהיה גדולה ב-|ע(ג)| מהכמות
שהייתה בה ~~שהדלק מן~~.

ולכן כמות הדלק בכל נקודה
תהיה חוקית כנדרש.
מ.ש.ל.

ד) המעבד v שיוזם את החישוב
שולח הודעת broadcast בטבעת
עם כמות הדלק של המכונית שיוצאת
מהתחנה שלו בכיוון שליחת ההודעה.
כל צומת רושם לעצמו את כמות
הדלק של המכונית בכניסתו לתחנה,
מעדכן את כמות הדלק בהודעה
broadcast, ושולח את ההודעה הלאה.
בתום ה-broadcast הנ"ל, יוזם v
convergecast מציאת נקודת המינימום
של הדרך. בתום ה-convergecast
יודע v את מספר הצומת z
שבו כמות הדלק היא מינימלית.
(רק לציין שהמינימום מושג בנקודת
כניסה לאחת התחנות).
ע"י broadcast נוסף מיידע v את
כל שאר הצמתים על ה-Id של z.
זמן הריצה ~~ותקשורת הם~~ O(n).

5

סעיף (ג)



בגרף המתואר לעיל יש

$$1+1+2+\dots+2^{\log n-1} = 1+2^{\log n}-1=n$$

צמתים.

הקוטר שלו $D=\Theta(\log n)$

(הרדיוס ביחס ל- v_{11} הוא בדיוק $\log n-1$.)

כמות הבדיקות ~~[illegible]~~ של Dijkstra על הגרף

כאשר, אם v_{11} יוצא ממנו.

$$\cancel{1+(1+2)}+(1+2+4)+\dots+(1+2+\dots+2^{\log n})=$$

$$= 1 + (2^2-1) + (2^3-1) + \dots + (2^{\log n+1}-1)$$

$$= (2^2+2^3+\dots+2^{\log n+1}) - (\log n - 1) =$$

$$= 2^2(1+2^1+\dots+2^{\log n-1}) - (\log n - 1) =$$

$$= 2^2(2^{\log n}-1) - (\log n - 1) =$$

$$= 2^{\log n+2} - \log n - 3 = O(n), \cancel{\Omega(\dots)} =$$

Note that $\Omega(n \cdot D) = \Omega(n \cdot \log n)$.

ב

כן

הוכחה.. אלג' Dijkstra שולח
לפעמים בשלב [illegible] גרף
[illegible] שלו. מ.ש.ל

ג

$\Omega(D^2)$ זמן. – כן

הוכחה

לפי מבנה האלג', האלג' קורס

$$1 + 2 + \dots + Rad(G,v) = \frac{Rad(G,v)(Rad(G,v)-1)}{2}$$

$$= \cancel{O}\ \Omega(D^2)$$

מ.ש.ל

זמן.

$P = (V(P), E(P))$

ט) יהי Π^* אלג' לצביעת מסלול P שעובד

באופן הבא: הוא בונה עץ (T, z_t)

שבו השורש z_t הוא הקצה השמאלי

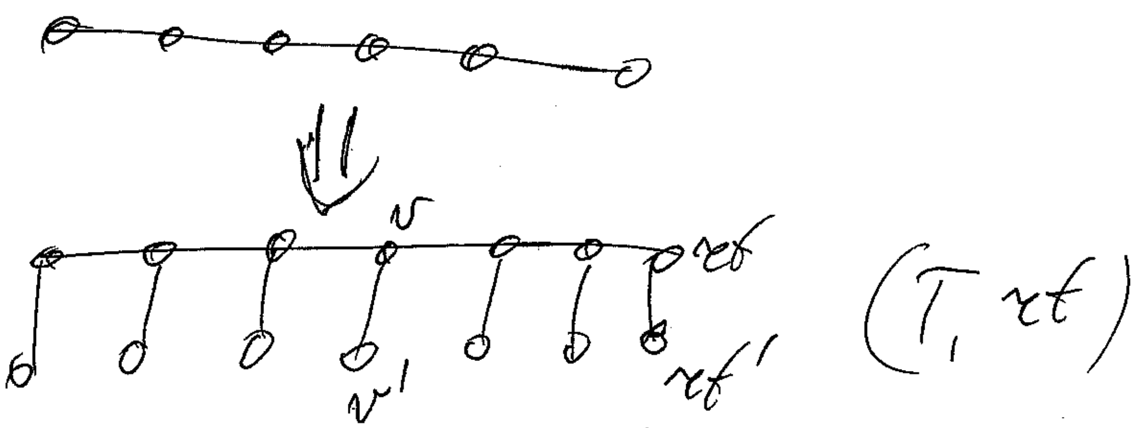
של המסלול, ובעץ יש את כל הצמתים

והצלעות של המסילה וכנוסף לכך,

לכל צומת v במסילה מתווסף צומת y_v

חדש שמחובר ל-v באמצעות צלע

חדשה $\{y_v, v\}$.



~~מכאן Π^* אלג' מפסיד את~~

כמו-כן, הקב' U מוגדרת כאוסף כל הצמתים החדשים y_v

$U = \{y_v \mid v \in V(P)\}$.

קל לראות ש-U היא קב' ב"ת מקסימלית.

עתה האלג' Π^* מפעיל

את האלג' Π על הבסיס (T, rt)

ומקבל כ"ת מקסימלית U.

באלג' Π^* כל צומת ע מסמן גם

את י'ט. בתום הביצוע של Π

מתעלם Π^* מהצבעים שניתנו לצמתי י'ט,

ומשתמש רק בצבעים שניתנו לצמתי

המסילה. הצביעה שמתקבלת היא 3-צביעה

של המסילה (כי היא צימצום למסילה

של הת-צביעה של (T, rt)).

לכן $Time(\Pi^*) \le Time(\Pi) + O(1)$.

~~כמו-כן~~ $\cancel{Time(\Pi^*) = \Omega(\log^* n)}$.

~~על-כן~~ $\cancel{Time(\Pi) = \Omega(\log^* n)}$

~~כנדרש~~.

מ.ש.ל.

ע"ק