הסיבוכיות למבחן מועד א'
בקורס "אלגוריתמים מבוזרים".

1) בפעולת אלג' Bellman-Ford.

בהתחלה ל-v יש משקל $dist(v)=0$ ולכל הצמתים הנותרים $u \in V$, $u \neq v$, $dist(u)=\infty$.

v שולח הודעה לכל שכניו עם $dist(v)$.

כל צומת u שמקבל הודעה מ-w עם $dist(w)$ משווה את $dist(u)$ עם $dist(w)+w(\{u,w\})$ (משקל הצלע המקשרת בין u ל-w) ואם $dist(u)$ גדול ממש מ- $dist(w)+w(\{u,w\})$ אז u קובע

$$dist(u) \leftarrow dist(w)+w(\{u,w\}).$$

כמו-כן אם u משנה את ערך $dist(u)$, הוא גם מודיע הודעות לכל שכניו פרט ל-w עם עדכון ה-$dist(u)$.

~~הסוף המשלוח בלב~~

כמו-כן u שומר עוד w (הצומת הסתברות שגרם לעדכון $dist(u)$) כאבא בעץ ה-SPT. הוא גם מודיע ל-w שהוא אבא, וכך w יכול לשמור עוד רשימת בנים.

טענה 1: אחרי n סיבובים של בלמן,
G בוודאי n יקיים
$dist(u) = dist_G(v,u)$.
כמו כן הבוודאי w שאת אותו n ~~בלבד~~
ישמור בשלב הבא כבבר איזו בעל T
יקיים
$dist(u) = dist(w) + w(\{u,w\})$.

הוכחה

תביה $P_{v,u}$ המסלול הקצר
ביותר המקשרת בין v ל-u ~~בעל~~ בגרף G.
יהי ~~אורך~~ אורך המסלול $w(P_{v,u})$
$|P_{v,u}|$ מס' הצלעות שבמסלול $P_{v,u}$
מכילה. קל לראות (באינדוקציה על $|P_{v,u}|$)
שאחרי $|P_{v,u}|$ סיבובים יתקיים
$dist(u) \le w(P_{v,u}) = \sum_{e \in P_{v,u}} w(e)$.
כמו כן קל לראות שלא יתכן ש
$dist(u) < w(P_{v,u})$,
כי אז ציינו שקיימת מסלול מתרת $P'_{v,u}$
~~שלמסלול~~ שגם היא מקשרת בין v ל-u
ומקיימת $dist(u) = w(P'_{v,u}) < w(P_{v,u})$, ובאור
סתירה לכך ש $P_{v,u}$ היא המסלול הקצר
ביותר המקשרת בין v ל-u ב-G.

כיוון ש u,v לא מסלב בשום
(תסכת-מסלולים) $|u,v| \le n-1$ ומכאן הטענה
נובעת מיידית. החלק השני של הטענה
מבטא שירות מן החלק הראשון ומתיאור
המילים.

מ.ש.ל.

טענה 1 מורכבת מת נכונות המילים,
ואת התסם המלוון לזמן הריצה
$Time(B\text{-}F) = O(n)$.
סדרת סיבוכיות התקשורת נשאר לב
~~של כמות הודעות יכול לסכם את $cost(u)$~~
~~שלו לפי הודעה~~ שבה סיבוכ ~~ב~~
~~כמות~~ נשלחת הודעה אחת לכל בן
בעץ של הגרף, ולכן בסה"כ נשלחות
$O(|E|\cdot n)$ הודעות במהלך המילים.

פיתרון שאלה 2)

ב - לשם פתרון בבעיית broadcast

עם $ctr=0$. כל צומת v שמקבל את

ההודעה ~~בצומת w~~ מוסיף 1 ל-ctr, קובע את

$l(v)$ להיות שווה ל-ctr של ההודעה

שעוד קיבל ומוריד 1, ואת לב בנין

בודעה עם ערך של ctr גדול ב-1

מצב שבא בהודעה שעוד קיבל.

בסוף התהליך כל צומת v

יודע את ב-$l(v)$ שלו.

עתה מתבצע convergecast pipelined של

מערכים

$n_0, n_1, \ldots, n_{Rad}$,

כאשר

$$n_i = |\{v \mid l(v) = i\}|$$

לכל $i \in [Rad]$.

במהלך ה-conv'st pipelined כל

צומת v שלח לאבו בעל Rad+1 הודעות

$n_0(v), n_1(v), \ldots, n_{Rad}(v)$, כאשר

$$n_i(v) = |\{u \in T_v \mid l(u) = i\}|$$

! T_v הוא תת-עץ של T שבשורש

ב-v.

כפי שאמרנו בסעיף, pipelined comm't
של m הודעות בעל מסלול Rad
דורש m+Rad סבבים. כאן m=Rad,
ולכן זה לוקח בערך 2·Rad. סוף Rad
~~שלב~~ סבבים מספיקים בכדי לתישב
הסרכים (ע"ל (ה-Broadcast).
לכן Time = O(Rad).
סיבוכיות התקשורת: לכל מחשב (n-1)
הודעות של בעל שלחו O(Rad) הודעות.
לכן Comm = O(Rad·n).

הערה: תלמידים רבים הגיעו פיתרון
שבו לכל דומות שולח מלבד פעם אחת
בעם מת סכומו הסרכים שמוטו מקבל
מהבנים. בעלים הזה נכון ומקיים לכל
זה שמאוחר לעיל, שכן הוא משוש יותר
ויעיל לבמות באותה מידה (מוקי אלף
יותר יעיל פי בקטור קבוע).

פיתרון שאלה 3)

ג) נסתכל על מחלקת המספרים a שבינו לבין k הקטנים בימים מתוך m המספרים. נניח שבשאלה נתון מצב בגודל v משפחה ומכי

$$P = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = w), \quad k \geq 0$$

המסלול הפשוט ביחידה המקשרת בין v ל-w בגלם T.

לפי הגדרת ה-Rad, $a \leq Rad$.

~~נסתכל k גודלות v_i משפחה $i \in [k]$ המסלול P ונשאל כמה מספרים לא בינם משפחה המספר a לתת מרכיב v_i~~

הגודלות v_0 יוצר מרכיבה ת"ק S_0 של קבוצת המספרים המקומית S. $(S_0 \subseteq S)$.

כיוון ש-a גדול בין k המספרים הקטנים ב-S, אז גדול בין k ו-v ו"ל בכל ת"ק של S, ובפרט גם ב-S_0.

לכן מצד k מספרים לא בינם ישלח v_0 את a ל-v_1 שנמצא מרכיב בגלם (T, w).

תהי S_1 קבוצת המספרים ש-v_1 יוצר בדומה שאנו קיבל את a מ-v_0 (כולל את a).

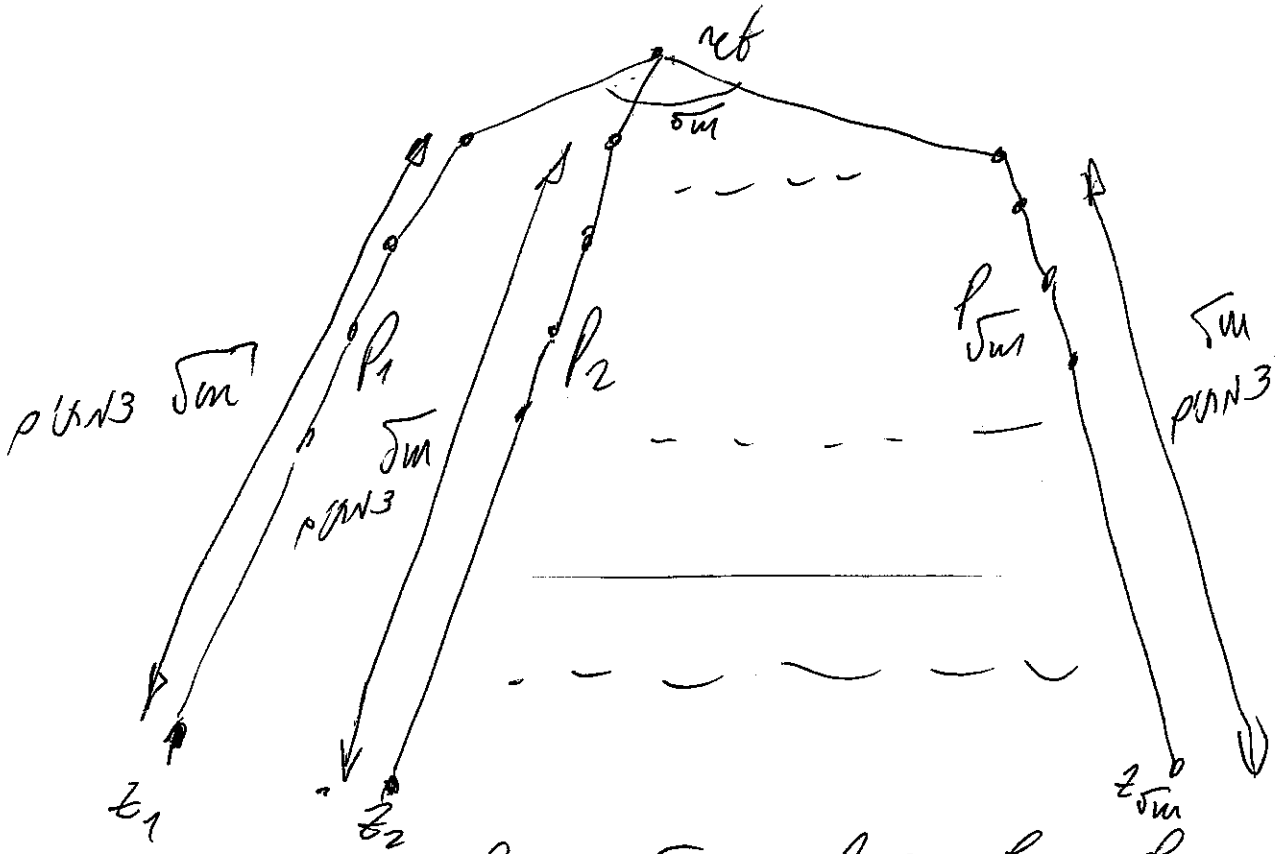
לפי אותו שיקול, מתוך k סיבובים קטן ביותר יסביר v_1 את a ל-v_2 וכו'. כלומר...

על-כן, מתוך $Rad \cdot k \geq h \cdot k$ סיבובים יפיץ דגר את a.

כיוון שכבר בין קטן מ-k במסגרים כל קצוות ב-S, אזי מסיקים שמתוך Rad·k סיבובים יפיץ דגר את S במסגרים כנ"ל.

<u>מ.ש.ל.</u>

2



נסתכל על גרף T_m בעל $m+1$ צמתים, סביר מ שיש שמקיים ב-$m\sqrt{5}$ הוא מספר שלם. הגרף T_m הוא צומת דגר שפרצתו $m\sqrt{5}$, ~~הוא מתובר~~ וכ"ו משמאל הוא קבע על מעלה ~~בצומת~~ בת $m\sqrt{5}$ צמתים.

(כולל הפשטן) ובמסילות המלא כבוד בבאתים.
(כולל דיור). למסילות נקרא $P_1, P_2, \dots, P_{\sqrt{m}}$.
m מספרים $\{1, 2, \dots, m\}$ מפוצלים בין
הרשלים $z_1, z_2, \dots, z_{\sqrt{m}}$. z_1 מכיל את
$(z_i \in V(P_i))$
$\{1, \sqrt{m}+1, \dots, (\sqrt{m}-1)\sqrt{m}+1\}$ ~~$\{1, \sqrt{m}+1, \dots, (\sqrt{m}-1)\sqrt{m}+1\}$~~
z_2 את $\{2, \sqrt{m}+2, \dots, (\sqrt{m}-1)\sqrt{m}+2\}$
$\vdots$
$z_{\sqrt{m}}$ את $\{\sqrt{m}, 2\sqrt{m}, \dots, m\}$.
~~$k = \sqrt{m}$~~. כמו כן, נקרא לו k לפי אותו
$\sqrt{m}$-ל.

בעיה שמאוד רשלה. עשוי ~~לה~~ לבדוק
לכל z_i יסרבה לא במספר i (שמוא במספר
הקטן ביותר מבין המספרים שבמקבצו ובלי
שמאות בחוש ל-ref) למשך $\sqrt{m}$ סבובים,
ואולם דבר יכול לקרות בקל בגלל
הבעיות של המסלה P_i.
לפי-כן בתסריט הכי ~~תיאור המספרים~~
יגיע במספר i ל-ref רק בסיבוב m
סיבובים וכבר מה שמנע בסיק להגיע.

מ.ע.ל.

בזמן. יש שלב broadcast ושלב convergecast
שמתבצעים מתושפת בגלל ~~הקלה~~ בכבדה בו בעת.
אז יש שלב הופכה לקבלת של הגלל
הגלגל שמודרכים לפי שער הבאתים שלא
הגלגלים ~~שלא~~ שמאוכלס לפם שמלבנת
ה-MST, ~~לא~~ ושאת הגלל הגלגל מ"ן
לבלוק ה-MST (שניהו לפו שורת ל-MST).
הגלגל הגב בגרף $O(n)$ זמן
ובנוסף מבצעת מבלל הגלגלים, בכן
בגרף הגב יש רק ~~ל~~ מסלל אחד
והגלל הכבדה בזמן שמתקדם מן המסלל.
סיבוכיות הסקשרת היא $O(n)$ גם.

פיתרון שאלה 5

באלגו. הוא גירסה של אלג' Pipelined MST
שנלמד בכיתה.

בשלב הראשון של כל צומת לומד את כל
ה- Fragment-Ids של שכניו בגרף
ומעדכן גם לגבי כל שכן שלו $e=\{u,w\}$,
הזהות גם $Frag\_Id(u)$! $Frag\_Id(w)$
(בנוסף ל- $Id(u)$! $Id(w)$).

גם פרט יתרון זמן מאד.

עתה, בונים על BFS פרט
של גרף אוניברסלי בצורה כזו שלשם
(שנתחיל באופן שרירותי - למשל, צומת בעל
$Id=1$), ~~אז בעל ה-Id הקטן ביותר~~
נקרוא לעץ הזה T.

עתה מריצים את אלג' Pipelined MST
על העץ T, אבל כל פעם שעולים
בעלי שלתים את ה-Fragment-Ids של קבוצה,
וגם אין פעם לא עולים בעלי שני
הקבוצות אלו, שייכים לאותו פרגמנט.

~~בשלב לא אותה מסוך הבעלות שעוד~~
~~בגלל זאת אלג' בגלל בגלל יכול מרגיש לא מעשיר~~
~~לא אלג' שלו סוגרים מעגלים~~

נשרש עץ מתאים משימת L של
בעיות שלו מעבירות מסלולים בינם, ושל כלל e
נוספת שאינו מקבל הוא בדיוק האם הוא
לא מעביר מסלול עם L ואם לא הוא מוסף
את e ל-L.

כשבונים של עץ ב-T מדגים,
ב- עץ שולח את L ב- Downcast
לשל בנים בלבד.

<u>טענה:</u> $|L| = O(\sqrt{n})$ עבור L שנשלח
ע"י ה-עץ ב-Downcast.

<u>הוכחה</u>
משתמש באלג' Pipelined_MST אבל
שבשלות של L בין בדיוק בשלות
של MST שמעבר בין הפרגמנטים.
כיוון שיש $O(\sqrt{n})$ פרגמנטים שמכסים
את כל הגרף, הרי שיש $O(\sqrt{n})$ בשלות
כאלה (כי בשלות של MST שמקשרת
בין הפרגמנטים יוצרות עץ פורש של
גרף הפרגמנטים והגרף הזה יש $O(\sqrt{n})$ בחלקים,
ולכן מספר בשלות בעץ הזה במספר
בשלמים פחות 1).
לכן $|L| = O(\sqrt{n})$.

מ.ש.ל.

מבטיחים שבבוקר בטסטה עשה
לפי שבתוך-דרך שבנה ע"י בעלים
בונה ב- MST רבי ובלעדות של L בין
הדיון הבלעדי בתסכים.

טענה: זמן הריצה של בעלים בונה $O(n\log n)$.

הוכחה

אופן שקבי הבלעדות בין-פרוצדורלית תסכת-מסלים בלבד
בונה בלבד בונה $O(n\log n)$.
לכן לא בומת דרך קשות לעדכון
$O(n\log n)$ או פחות בלעדות.
לכן מכל כתב כאן לעשות
Pipelined Convergecast של $O(n\log n)$ עבדים בעל
בסומקי $O(n\log n)$, וכב פנים $O(n\log n)$ זמן
רב שלמה בכיתה.
(בטיחון בתדיר בונה אלגוס לעמדי
לעיתות של בעלים Pipelined MST שנעשה
~~בכיתה~~ בכיתה).

מ.ש.ל.

פיתרון שאלה 5

מפעילים 7 פעמים את האלג'
"רקורסיבי במספר הפעמים" שלמדנו בכיתה.
האלג' הוא כלל: לכל צומת v שאינו הארש
של העלים, משנים את color(v) (הצבע
של v באותם כללים) מ- color(parent(v))
(כאשר parent(v) הוא סבא של v בעלים).
בהתחלה, לכל צומת v, color(v) = Id(v).
הוא מוצא את האינדקס i של הבן
שם $color(v)[i] \neq color(parent(v))[i]$
ומבצע $color(v) \leftarrow bin\_xor(i) \circ color(v)[i]$.
כמו שלמדנו בכיתה, האלג' כולל מדרגה
לא כמה הבדלים בצורה סינכרונית
(כלומר לפני האלג' הוא לוגו בעלים בעלי
"גובה בינארי" ~~בעלים~~ בן t ביטים, הרי
שאחרי האלג' יהיו בעלים בעלי "גובה
בינארי" של $\lceil \log t \rceil + 1$ ביטים),
והוא שומר על תקינות הבעיה.
האלג' לא מאפשר לעשות מקומות
(בגלל הרוטציות הפנימיות של המסכמים), עליהם
צריך בהתאמה.

אותו בעזרת הצבע של מערך מיוחד
(שמו'ל עליה)
את ~~של~~ בנו
מהו. נוצרת בתיים שלו. גם פורש ~~[illegible]~~ סדרות
מתוך.

ומפעילים את שני העצים בניין בלוקצה
שפעה בעמים ~~בבנו~~ מתוך מאדי המשנ'.
כוונת בעצים שמתקבלת כיש קצב מו
אותה מ-
$O(\log^{(8)} n)$.

~~O(n)~~
אמת כי מתבילים ~~O(log n)~~ n בעצים,
ושל בפעלה של בעזר מוריד את כמות
בעצים מקסמונ'ציות
(בלי תקשורת בשלב אפשר לבנ'ל
$O(\log n)$ בעצים כי מרגיש של בזמן
יופע את ה-Id שלו ואת ה-Id של מבינ'
תוך סיבוב מתוך אפשר לבודיק את
כמות בעצים ל- $O(\log\log n)$, וכך הלאה...)