מתמטיקה בדידה

הרצאה מס' 12

בשבוע הקודם הכרנו: עקרון ההכלה וההפרדה.

נתונים m אלמנטים ותכונות $P_1, \dots, P_t$ שיש או אין לכל אחד מהאלמנטים.

נסמן ב- $W(P_i)$ – מספר האלמנטים שלהם תכונה P_i.

$W(P_iP_j)$ מספר האלמנטים שיש להם תכונה P_i ותכונה P_j

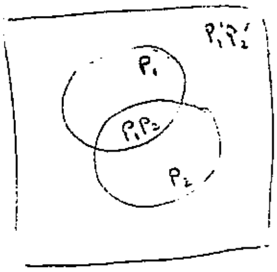
$W(P_i')$ – מספר האלמנטים שאין להם תכונה P_i.

בלי תלות אם יש להם תכונה P_j, לכל $j \neq i$

וכו'

בדוגמא הראשונה בחרנו כ- P_1 את שחורי השיער וכ- P_2 את המשקפיים

$$W(P_1'P_2') = m - W(P_1) - W(P_2) + W(P_1P_2)$$



ובאופן כללי, עבור t תכונות:

$$\begin{aligned}W(P_1'P_2'\cdots P_t') = \underbrace{m}_{W(0)} &- \overbrace{W(P_1) - W(P_2) - \dots - W(P_t)}^{W(1)} \\ &+ \overbrace{W(P_1P_2) + W(P_1P_3) + \dots + W(P_{t-1}P_t)}^{W(2)} \\ &- \overbrace{W(P_1P_2P_3) - W(P_1P_2P_4) - \dots - W(P_{t-2}P_{t-1}P_t)}^{W(3)} \\ &+ \dots \\ &+ (-1)^t \overbrace{W(P_1P_2\cdots P_t)}^{W(t)}\end{aligned}$$

לנוסחה זו קוראים הכלה והפרדה.

דוגמא נוספת:

כמה סדרות אפשר לרשום מ- m_1 "a", m_2 "b" ו- m_3 "c"

כך שלא כל ה-a יהיו מקובצים ביחד, ולא כל ה-b מקובצים ביחד ולא כל ה-c מקובצים ביחד.

תכונות:

P_1 - הסדרה מכילה סדרה של m_1 a רצופים (ה-a מקובצים)

P_2 " m_2 b "

P_3 " m_3 c "

בנוסחה לעיל, m הוא מספר האפשרויות הכולל שבהם לא אין אף אחת מהתכונות. כאן:

$$m = \frac{(m_1+m_2+m_3)!}{m_1!\, m_2!\, m_3!}$$

סה"כ $m_1+m_2+m_3$ אותיות וזה בגלל החלפת סדר בין ה-a, ובין ה-b ובין ה-c.

$$W(P_1) = \frac{(m_2+m_3+1)!}{m_2!\, m_3!}$$

$$W(P_2)$$

$$W(P_3)$$

$$W(P_1P_2) = \frac{(m_3+2)!}{m_3!}$$

$$W(P_1P_2P_3) = 3!$$

$$W(P_1'P_2'P_3') = m - W(P_1) - W(P_2) - W(P_3) + W(P_1P_2) + W(P_1P_3) + W(P_2P_3) - W(P_1P_2P_3)$$

הוכחת עקרון ההכלה וההפרדה

שאלה בנוסח
ההגדה [illegible]

נסמן $W(r) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots \le t} W(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_r})$

כשהסכום הוא על כל $\binom{t}{r}$ הקבוצות של r תכונות מתוך t תכונות.

$W(r)$ – מספר זה כל אלה שיש להם r תכונות (או יותר)

עפ"י קבוצת התכונות שיש להם.

אלה שיש להם יותר מ- r תכונות יספרו יותר מפעם אחת.

$$W(1) = W(P_1) + W(P_2) + \dots + W(P_t)$$
$$W(2) = W(P_1 P_2) + W(P_2 P_3) + \dots + W(P_{t-1} P_t)$$

יש לשים לב שב- $W(1)$ אינו מספר האיברים שיש להם תכונה אחת.

אלמנט שיש לו 3 תכונות יספר ב- $W(1)$ 3 פעמים - $\binom{3}{1}$

ב- $W(2)$ הוא יספר $\binom{3}{2}$ פעמים, ב- $W(3)$ פעם אחת

וב- $W(4)$, $W(5)$, ... אף פעם $\binom{3}{4}, \binom{3}{5}, \dots$

נגדיר $W(0) = N$

$E(m)$ - מספר האיברים שיש להם בדיוק m תכונות

$$E(0) = W(P_1' P_2' \dots P_t')$$
$$E(1) = W(P_1 P_2' \dots P_t') + W(P_1' P_2 P_3' \dots P_t') + \dots + W(P_1' P_2' \dots P_{t-1}' P_t)$$
$$\vdots$$
$$E(t) = W(P_1 P_2 \dots P_t)$$

נוסחת הסינון הכללית:

$$E(m) = W(m) - \binom{m+1}{m} W(m+1) + \binom{m+2}{m} W(m+2) - \cdots \qquad (*)$$

$$+ (-1)^{t-m} \binom{t}{m} W(t) =$$

$$= \sum_{j=m}^{t} (-1)^{j-m} \binom{j}{m} W(j)$$

בפרט $m=0$ נקבל את הנוסחה הקודמת עבור $W(0); P(j)$

<u>משמעות הנוסחה:</u> מספר האלמנטים שיש להם <u>בדיוק</u> m תכונות

הוכ ~~...~~

ב-$W(m)$ סופרים $\binom{g}{m}$ $\cancel{\binom{m}{g}}$ פעמים כל אחד שיש לו g תכונות.

כי צריך לבחור ספציפית את m התכונות מתוך g בהתאמה שונים כמו בהכלה וההפרדה.

אבל את g התכונות נספר ב-$W(m)$ $\binom{g}{m}$ פעמים.

כאשר $g<m$ הוא אינו נספר אף פעם $\binom{g}{m}=0$

כאשר $g=m$ הוא נספר פעם אחת $\binom{g}{m}=1$.

<u>הוכחת נוסחה (*)</u>

נבדוק כמה פעמים נספר אלמנט עם g תכונות בצד הימני של השוויון (*):

$$\binom{m}{m}\binom{g}{m} - \binom{m+1}{m}\underbrace{\binom{g}{m+1}}_{\text{נספר ב-}W(m+1)} + \binom{m+2}{m}\binom{g}{m+2} \cdots + (-1)^{t-m}\binom{t}{m}\binom{g}{t} \qquad (**)$$

נספר ב-$W(m)$

בהכלה 1 כ-$\binom{m}{m}$ לבחור את m

נשתמש ב הזהות הבינומית: (משפט 10 בחוברת)

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

הוכחנו
בחירת k ו- $m-k$ ועוד ...

$$\binom{m}{m}\binom{q}{m} = \binom{q}{m}\binom{m}{m} = \binom{q}{m}\binom{q-m}{m-m} = \binom{q}{m}\binom{q-m}{0}$$

$$\binom{m+1}{m}\binom{q}{m+1} = \binom{q}{m+1}\binom{m+1}{m} = \binom{q}{m}\binom{q-m}{m+1-m} = \binom{q}{m}\binom{q-m}{1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{t}{m}\binom{q}{t} = \dots \quad \binom{q}{m}\binom{q-m}{t-m}$$

(**) שווה ל-

$$\binom{q}{m}\left[\binom{q-m}{0} - \binom{q-m}{1} + \dots (-1)^{t-m}\binom{q-m}{t-m}\right] \qquad (***)$$

זהות בינומית מס' 4 בחוברת:

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i} = 0$$

הצבה $x=-1$, $y=1$ בבינום

ובפרט נכון גם כאשר $k>m$: $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{m}{i} = 0$

(כאשר $m<i$ $\binom{m}{i}=0$).

<u>מסקנה:</u> כאשר <u>$q>m$</u>. $(**) = (***) = 0$

כלומר, בצד ימין של (*) נספר אפס פעמים, וכל 1- m מכילה 0 פעמים.

בצד שמאל של (*) הוא נספר 0 פעמים ב- $E(m)$

(מספר המאורעות בהן בדיוק m מכילה)

כאשר $m<g$ הוא יספר בכל יתר של (*) 0 פעמים את

האמרה $W(m)$.

ואם בכל שעון של (*) הוא יספר 0 פעמים.

כאשר $g=m$ הוא יספר בכיון שלם יותר ב- $W(m)$

ו- 0 פעמים ב- $W(m+1)$; $W(m+2)$, ...

לכן השוויון (*) מתקיים.

הערה: $E(0) = W(p'_1 \dots p'_t)$

ולכל $E(m) \neq W(p_1 \dots p_m p'_{m+1} \dots p'_t)$

כי $E(m)$ לפי (*) הוא כמות כל אלה פעם לא- m מעלה

של ואת בהכרח אלה פעם לא- יותר א- m מעלה.

דוגמא: בעית סדור

תמורה של המספרים $1,2,\dots,m$ נקראת הפרת סדר אם אף מספר אינו נשאר במקומו. כמה הפרות סדר יש ל- m מספרים?

תכונות: P_i – המספר i נמצא במקום ה- i $\quad i=1,\dots,m$.

פתרון:

$$E(0) = W(P_1'P_2'\dots P_m') = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j W(j)$$

$$W(j) = \sum W(P_{i_1},\dots P_{i_j})$$

כשהסכום הוא על כל $\binom{t}{r}$ האפשרויות הבחירה של j תכונות מתוך t.

$$\boxed{W(0) = m}$$

במקרה שלנו:

$W(P_i)$ – שהמספר i נמצא במקום ה- i הינו (מספר האפשרויות) $(m-1)!$

(i במקום ומסדרים את כל היתר)

$$W(P_1) = W(P_2) = \dots = W(P_m)$$

$W(P_iP_j)$ – מספר האפשרויות שהמספר i והמספר j נמצאים כל אחד במקומו.

$(m-2)!$

זהה לכל בחירה של i ו- j.

:

$$\boxed{W(1)} = W(P_1)+\dots+W(P_m) = \binom{m}{1}W(P_1) = \binom{m}{1}(m-1)!$$

$$\boxed{W(2)} = \binom{m}{2}(m-2)!$$

$$W(m) = \binom{m}{m}(m-m)! = 1$$

(ד)

$$E(c) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)! = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i\, n!}{i!\,(n-i)!}(n-i)! = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i\, n!}{i!} =$$

$$= n! \sum \frac{(-1)^i}{i!} = n!\underbrace{\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right]}_{\frac{1}{e}} =$$

$$= \frac{n!}{e} \approx 0.37\ n!$$

כלומר, בערך 37% מהתמורות הן הפרעות סדר.