**פתרון בעיות במתימטיקה ובחינוך מתמטי – רב-שיח**

**בהשתתפות: בוריס קויצ'ו (מנחה), ג'ראלד גולדין, רוזה לייקין, איזי וויינצוויג, שלמה וינר**

ערב טוב, היה זה יום ארוך עד כה, ואירוע נוסף לפנינו, הפאנל בנושא "פתרון בעיות במתמטיקה וחינוך מתמטי". שמי בוריס קואיצ'ו, אני מהטכניון, וכמו ניצה, אף אני זכיתי לכבוד שיזמינו אותי להנחות באירוע זה לפני מס' חודשים. 2 מחשבות עלו מייד בראשי- הראשונה, פתירת בעיות היא נושא הגיוני עבור כנס זה, מאחר והיא גשר טבעי בין מתמטיקה וחינוך מתמטי, למרות ששם הפאנל רומז לנו כי אין המצב כך עבור 2 הקהילות. השניה, שזהו החלק היחידי הערב שעוסק בפתרון בעיות, וזוהי דרכו של הצוות לרמוז לנו כי פתרון בעיות הוא נושא שעבר דרך ארוכה בהיסטוריה של חינוך מתמטי. אז תודה שהגעתם. כעת אציג בקצרה פאנל מכובד זה. לפני כל חבר פאנל אדבר עליו מעט. בקצה השמאלי של שולחן זה יושב פרופ' ג'ראלד גולדין מאוני' ראטגרס, רוזה לייקין מאוני' חיפה, איזי וויינצוויג מאוני' אילינוי שבשיקגו ושלמה וינר מאוני' בן גוריון. התוכנית היא כזו: כל פאנליסט יקבל 10 דק', אח"כ, לפני שאפתח את הדיון הכללי אשאל את הפאנליסטים האם הם מעוניינים להגיב על דברי הקהל, ורוב הזמן יהיה דיון פתוח.

אתחיל בלהציג את ג'ראלד. ג'ראלד גולדין קיבל את הPHD שלו בפיזיקה תיאורטית מאוני' פרינסטון, הוא יצר תוכנית בלימודי מתמטיקה וחינוך מדעי באוני' אילינוי. לפני כן הוא הצטרף לאוני' ראטגרס ב1984. הוא פרסם כ200 מאמרים במתמטיקה, פיזיקה תיאורטית ולימוד מתמטיקה ופתרון בעיות. הוא קיבל פרס על עבודתו בפיזיקה קוואנטית. בחינוך מתמטי, עבודתו התמקדה בייצוגים בפתרון בעיות והשפעת דומיינים על לומדי מתמטיקה והטמעתם. הוא ביקר בטכניון ב2012 (ואנו גאים על כך מאוד), ובנוסף הוא כתב 2 ספרי ילדים, שבתי אוהבת במיוחד.

ג'ראלד: תודה רבה לכם. אני רוצה להודות למארגני כנס זה, זהו כבוד גדול שהזמינו אותי לכאן, וברצוני להודות לטד על ההתלהבות וההשראה המתמשכת שהוא נותן לנו, גם בנושא פתרון בעיות מתמטיות וגם בחינוך מתמטי. כאשר הכנתי את הנאום הקטן שלי, חיפשתי באינטרנט דברים נחמדים לומר על טד. תוצאת החיפוש הראשונה היתה טור עם בעיות מתמטיות שטד ערך, והבעיה הראשונה היתה כה מאתגרת, שאחרי כשעה וחצי הבנתי שלא יהיה לי זמן למצוא דברים נחמדים נוספים לומר על טד. אך זה סוג הדברים שטד עושה, וזה דבר נהדר. חשבתי לפתוח פאנל זה עם רעיונות לדיון, נק' ראשונה עוסקת בראית פתרון בעיות כמטרה בחינוך מתמטי, בשנות ה80 היה נראה כי זוהי המטרה הראשית של החינוך המתמטי, שתלמידים ידעו כיצד לפתור בעיות. נשאלת השאלה מה עלינו ללמד. נראה לי שהיה זה ג'נגרינו NAME שכתב שעלינו ללמד את הידע הדרוש לפתירת הבעיה. זה מוביל לניתוח המשימה, מה הקוגניציה צריכה ע"מ לפתור את הבעיות (הקלאסיות), זה מפורק לגורמים ואנו מלמדים זאת. נראה שהסטודנטים מצליחים יפה בבניית ידע מתמטי. בעיה נוספת, היא ראיית פתירת בעיות כמשמעות חשובה של לימוד מתמטי. כלומר- המטרה היא לא לפתור את הבעיה, אלא להבין מתמטיקה דרך פתרון בעיות. אז מה זה אומר, להבין מתמטיקה דרך פתירת בעיות? גישה אחת היא לבחון ייצוגים סטנדרטיים- מתמטיים, תהליכים, אסטרטגיות, ולנסות לפתח אותם אצל תלמידים. גישה אחרת היא לנסות לפתח ייצוגים חדשים, חיצוניים ופנימיים, מאפיינים, צורניים, הקשרים בין ייצוגים, ולראות פתרון בעיות כדרך לבניית ההמשגה. העניין השלישי נוגע להשפעות תוצאות אלו של פתירת בעיות, התוצאות יכולות לגרום לתלמידים לחוש זיקה לסוג מסויים של מתמטיקה, לפתרון בעיות, ולתפיסת עצמם כפותרי בעיות ולומדי מתמטיקה. זה כמובן מרכזי בהשפעת הדומיינים, וכמובן נושא האסתטיקה- האם פתרון בעיות ייתן להם הרגשה של הבנה וניסיון, או שפתירת בעיות תוביל לניסיון מכוער- הנה, פתרנו את הבעיה, סיימנו. נשאלת השאלה לגבי פתרון הבעיות של מדענים, מתמטיקאים, מורים ותלמידים למתמטיקה – כיצד מומחים עושים שימוש בטכניקות שפותחו בעבר, לעיתים זה היה בלב מחקר החינוך המתמטי וקוגניציה. מה עומד מאחורי תהליכי הלמידה של המומחים? מה הם לומדים דרך פתרון בעיות? אילו יכולות קוגניטיביות פותחו דרך פתרון בעיות? אילו יכולות-על קוגניטיביות התפתחו? אילו אינטראקציות אישיות וחברתיות לקחו חלק בתהליך, כיצד הן תרמו למומחיות? שאלות אלו נוגעות להליכי עיבוד הרבה יותר מורכבים וקשים לזיהוי. אני מאמין כי השאלה המרכזית, אם נראה פתרון בעיות כמובן דרכו ניתן ללמוד מתמטיקה, מה נדרש ע"מ לאפיין את הליכי הלמידה האפשריים בפתרון בעיות מתמטיות, ואינני רוצה לטעון שאין דרך אחרת ללמוד מתמטיקה, אך אני סבור כי פתרון בעיות הוא חלק אינטגרלי בלימוד מתמטיקה והבנתה. אתגר גדול באיפיון תהליכים אלו הוא הבנת שלבי העיבוד והפיכתם לברורים יותר. לעיתים יש בעיות שלא תמיד בלתי מובנות ונגישות עבור פותר הבעיה ויכולתו הקוגניטיבית, אך קשות יחסית להבנה ע"י פותר הבעיות, ועלינו להציף בעיה זו. מעניין לראות כי עבור פותרי בעיות מיומנים יותר, שלבי הפתרון עשויים להיות פחות ברורים ולכן קשים יותר לפיענוח. כיצד אנו יכולים ליישם את מה שלמדנו בפתרון בעיות במע' החינוך שלנו? אם אכן נצליח באיפיון הליכים חשובים בלמידה, כיצד נוכל ליישם זאת כחלק מלימוד פתרון בעיות? זה מתחבר לשאלה ששאלתי מוקדם יותר היום לגבי השימוש בהערכות סטנדרטיות כדי להעריך מורים למתמטיקה. הערכות אלו, כמעט בהכרח, אינן משקללות הליכים, אלא תוצאות. כתוצאה מכך, מלמדים כיצד לפתור את הבעיות הקלאסיות, במקום להתמקד במה שניתן ללמוד דרך פתרון הבעיות.

מס' נושאים אחרונים שברצוני להעלות לדיון נוגעים לגישור בין לימוד מתמטיקה ומתמטיקה (כולל מדעים מדוייקים, אני עצמי מתרגל פיזיקה מתמטית). מייקל פריד אמר שבצורה מסויימת, אני מקווה להוות השראה בכנס זה, מאחר ובשיחה שהיתה לפני מס' שנים תיארתי את עצמי כחצוי בין 2 המחנות, רגל פה ורגל שם, וחושש ליפול לפער שביניהם. לעיתים אני עדיין מרגיש כך, אך כנראה שהתרגלתי לתחושה. ע"מ לגשר על פער זה, לדעתי עלינו לזנוח מינוחים מזלזלים מסויימים, באם הם מרומזים או מפורשים. משתמשים בהם בשתי הקהילות. מניסיוני, היו שאמרו, כאשר התחלתי לעסוק בחינוך ורציתי לדבר על המבנה של בעיות מתמטיות, שאסור לי לדבר על כך. שאלתי מדוע ונעניתי- כי זה לא קיים! ובכן, יכולה להתפתח פה שיחה מעניינת לגבי משמעות הקיום שבו מבנה של בעיות איננו קיים. היה זה חיוני מאוד עבורי לדבר על כך, אם ברצוננו להבין פתרון בעיות. לאחר מכן נאמר לי כי אסור לדבר על מבנה קוגניטיבי, מאחר והוא לא קיים. מותר לדבר על התנהגות- זה בסדר כי ניתן לצפות בה, אך לא במבנה קוגניטיבי. אח"כ נתבשרתי כי אסור לדבר על ייצוגים. ניתנו לי 2 סיבות לכך: אסור לי לדבר על ייצוגים חיצוניים כי אין לנו באמת גישה אל העולם האמיתי, אלא לעולם הניסיון שלנו. אסור לדבר על ייצוגים פנימיים כי לא ניתן לצפות בהם, ומכאן יוצא כי אסור לדבר על ייצוגים כי הם חיבור בין ייצוגים פנימיים וחיצוניים, ואין זה מקובל, שהרי זה דואליזם גוף-נפש פסול. אם כך- אסור לי לדבר על מבנה, ייצוגים (חיצוניים ופנימיים)- אז על מה מותר לי לדבר? אם כך, כמדען מתמטיקאי שנכנס לתחום החינוך, היה זה הלם עבורי שאסור לי לדבר על דברים מסויימים. היה אסור לי לומר את המילים המפורשות, אבל זה לא היה משנה- היו לי ההגדרות. אך כיצד ייתכנו הגדרות לדבר שאינו קיים? זהו סוג אחד של התבטאויות פוגעניות. מצד שני ישנן התבטאויות נוספות מסוג זה- הן מגיעות מהקהילה המתמטית. אסור לי ללמד מושגים כי התלמידים לא יכולים ללמוד אותם עד שיהיו להם הכישורים ללמידה זו, והרי אם ממילא אין הם יכולים ללמוד כך, הרי מדובר בבזבוז זמן. אם יש להם את הכישורים הנדרשים, הם מפתחים את המושגים והתפיסה במהלך הלימודים. פעמים רבות אמרו לי אנשים שונים שכך הוא המצב, והראיה לכך היא שכך הם עצמם למדו וזה הצליח להם. אם כך, ההצלחה של אדם אחד הופכת להיות אב הטיפוס לקהילת המתמטיקאים, שהינם מוכשרים ומלומדים עד מאוד, אך אינם מוכנים לשמוע ידע חדש מהקהילה המחנכת למתמטיקה. אך כך, הזלזול מתרחש ב2 הקהילות, ואם נרצה לפתור מחלוקת זו, עלינו להפסיק לזלזל ולבטל דעות של אחרים ולהאזין להן. זה עשוי להיות הישג גדול לדעתי, ואם נצלח בכך, נלמד יותר על פתרון בעיות ולימוד מתמטיקה דרך פתרונן, ואולי אף נגיע להישגים אדירים. תודה רבה.

מנחה: תודה רבה, (פונה לרוזה, מסתדרים סביב שולחן+רעשי רקע). ברצוני להציג בפניכם את רוזה לייקין, פרופ' במחלקה לחינוך מתמטי, ראש התוכנית לחינוך מחוננים במתמטיקה, וראש המרכז הרב-תחומי לקידום מצויינות באוני' חיפה. היא מתמחה בלימוד וחינוך מתמטי, מחוננות מתמטית, יצירתיות והקשר ביניהם. רוזה?

רוזה: תודה רבה, בוריס. ראשית, ברצוני לומר שהמנחה הראשון שלי כסטודנטית עבד עם טד, וברצוני להודות לו על שנתן לי הזדמנות ללמוד כיצד לפקח. המנחה הקודם שלי היה NAME פאביה ויסלסקי, והבנתי שאין לי מה לעשות. טד אמר לי, כתבתי לעיתון בנושאי סימטריה, בסופו של דבר פתרתי את הבעיה. אני מניחה כי ההרצאה שלי שונה בכמה מובנים מהרצאות אחרות כאן. ראשית כל, רבים לא יסכימו עם מה שאני מתעתדת לומר, ואינני מתכוונת להתנצל על כך. אציג בפניכם חלק ממחקר שאנו עורכים כעת. עשר הדקות שלי מתחילות כעת.

באופן טבעי, פתרון בעיות היה במרכז של חינוך מתמטי, מתמטיקאים וחוקרים. חילקתי אותם ל3 קב' ולא במקרה. אני סבורה כי כל מי שיושב פה מעוניין ללמוד כיצד ללמד מתמטיקה טוב יותר ולפתח הבנה מתמטית טובה יותר. פתרון בעיות מתמטיות מהווה אחד משני רכיבים באיבחון מחוננות מתמטית. למשל- פתירת בעיה ברמה גבוהה משמשת לעיתים תכופות כאבחנה של מחוננים מתמטית- כמו באולימפיאדות במתמטיקה. מצד שני, המורים מעריכים את המחוננים מתמטית, לדעתם, אם יש לתלמידים הישגים גבוהים במתמטיקה בכיתות הרגילות. אם תשאל מורה מי תלמיד מחונן, הוא ישיב כי זה התלמיד שקיבל 100 במבחן. מחוננות מתמטית היא מושג חמקמק. אין דרך מוסכמת אחת לאבחן מחוננות מתמטית. בנוסף, אין הגדרה ברורה מה היא מחוננות מתמטית. במחקר מתמטי, ברור מאוד כי אדם שהצליח לגלות או להוכיח דבר מה שלא הוכח קודם, הרי הוא מחונן, ישנה הסכמה אחידה לגבי נק' זו. מצד שני, בבתי ספר איננו מצפים שתלמידים יגלו שלשה פיתגורית ללא הדרכה פרטנית. אם כך, בכיתות ביה"ס הרגילות, אנו מתייחסים ליצירתיות ולמצויינות יחסית. השילוב בין יצירתיות ומצויינות נותן לנו כפל משמעות של המושג. אם נשאל- האם תלמיד יכול להגיע להישגים גבוהים כגון הנ"ל תחת הדרכה מקצועית פרטנית, יהיו שיענו מייד בחיוב. אני טוענת כי אין זה המקרה. מדוע חשוב בעיני לדבר על נושא זה? משום שאחד הדברים שאנו מדברים עליו בכנס זה הוא הקשר בין השכלה מתמטית למתמטיקה, ואחת המטרות הגדולות של השכלה מתמטית, היא להכשיר תלמידים שברבות הימים יהיו מתמטיקאים מקצועיים. אם כך, הרי כדאי שנגדיר מהי מחוננות מתמטית ומי עשוי להיות מתמטיקאי מוכשר. כך נוכל לדעת אילו בעיות מתמטיות נלמד בכיתות ביה"ס ואילו כלים דידקטיים נוכל לעצב. בין אם הכיתות יהיו הומוגניות או הטרוגניות, כיצד נוכל לאבחן תלמיד מחונן במתמטיקה? אציג בפניכם חלק ממחקר, שמהווה רק טעימה קטנה ממנו, מאחר ומדובר בפרוייקט נרחב. אציג בפניכם חלק מהתוצאות ואת עמדתנו בנושא. אני מנהלת יחד עם בעלי מארק לייקין, ד"ר שלי שאול NAME ו3 תלמידי PHD שכל אחד מהם ביצע חלק מהמחקר. האחד עסק בהתאמת יכולות קוגניטיביות, השני עסק בפעילות מוחית כתוצאה מהתמודדות עם בעיות מתמטיות, והשלישי עסק ביצירתיות מתמטית ומשימות של בעיות רבות-פתרונות. אנו עובדים עם 200 מאגרי נתונים, מעט קטנים יותר ממה שיש ברשותנו עכשיו, אנו עובדים עם 200 סטודנטים שנדגמו מתוך 1500. 2 קריטריונים נבחנו במחקר- הראשון הוא מצויינות במתמטיקה כפי שהיא מבוטאת בביה"ס, והשני הוא מחוננות כללית לפי מבחן רייבן NAMEלאיי.קיו. לפני כן מישהו דיבר על מחקר סטטיסטי, זוהי דוגמה. האבחנה בין מחוננות כללית לבין מצויינות במתמטיקה, לדעתי אנו הראשונים שעשו זאת, מאחר וברוב המחקרים מחוננים מתמטית נבחרו מתוך קב' שלמדו במסגרות מיוחדות למצויינות, וידעו כבר שהם מחוננים. לעומת זאת, אנו סבורים כי מחוננות כללית ומצויינות מתמטית צריכות להיבחן בנפרד, ויש להשוות ביניהן. זו הסיבה לאבחנה שלנו. במחקר קוגניטיבי, אנו בודקים 3 סוגי זיכרון- זיכרון לטווח קצר, זיכרון ויזואלי ייחודי, וזיכרון עבודה. התוצאות היו כה מפתיעות עד כי ביצענו שוב ושוב ניתוח סטטיסטי, כדי לוודא שלא השמטנו אף פרט. מצאנו כי בזיכרון לטווח קצר, רק פקטור G היה משמעותי, כלומר- אין הבדל כאן בין תלמידים מצטיינים ולא מצטיינים, אך קיים הבדל בין מחוננים ולא מחוננים. בזיכרון ויזואלי, באופן הפוך, רק למצויינות מתמטית היתה השפעה, ולמחוננות כללית לא. בזיכרון עבודה, השפעת המצויינות היא הפוכה- כפי שניתן לראות פה בגרף.

החלק השני הוא חקר המוח. יש לנו 9 מערכי מבחנים: כפל פשוט, גיאומטריה, ובעיות מילוליות. למשל- במצולע יש 8 צלעות, במצולע חדש יש 9 צלעות, אחד מהם לא מסומן. התשובה צריכה להיות מיידית, ישנן 60 בעיות מסוג זה במבחן. מצאנו כי בכפל פשוט ובגיאומטריה, רק למצויינות ישנה השפעה, ורק בבעיות מילוליות ישנה השפעה של מחוננות כללית. אלו הם המדדים ההתנהגותיים. כאשר נסתכל על פעילות מוחית, בכפל פשוט רק מצויינות מתמטית לקחה חלק, בגיאומטריה ישנם דפוסים שונים עבור מחוננות ומצויינות במתמטיקה, ובבעיות מילוליות קיים רק פקטור G שמשפיע על הפעילות המוחית של התלמידים. זהו החלק היצירתי. עלי לסיים, לכן ברצוני לסכם ולומר מס' היפותזות: מצאנו כי מחוננות ומצויינות במתמטיקה הם שני מצבים שונים מטבעם. הם שונים ב3 מחקרים נפרדים. החדשות הטובות הן, כי מצויינות במתמטיקה יכולה להתפתח בקב' תלמידים גדולה, ואינה שמורה רק למחוננים. עם זאת, מאחר ובעיות מילוליות מהסוג שבחנו עליהן אינן כלולות בחומר הלימוד בביה"ס, המחוננים אינם מאותגרים מספיק. לסיכום, כדאי מאוד לכלול בעיות מילוליות מסוג זה בחומר הלימוד בביה"ס. יש לפתח כלים דידקטיים מתאימים לצרכי המחוננים, ויש לערוך מבחנים מותאמים כדי לזהות תלמידים אלה. תלמידים מחוננים מתמטית זקוקים למורים מחוננים מתמטית, ו...זמני נגמר.

מנחה: תודה.

אתחיל בלומר- איזי ויינצוייג, אוני' אילינוי, שיקגו. היה זה נהדר להתכתב עימו, ואוסיף דבר מה שאיזי ודאי לא יאמר בעצמו לגביו. איזי ויינצוייג קיבל את התואר שלו בהנדסת פיזיקה מאוניברסיטת טורונטו ועשה את התואר השני והשלישי שלו בהארוורד. הוא לימד באוני' ברקלי בקליפורניה, לאחר מכן באוני' נורת'-ווסטרן, רק ובמשך שנים רבות מ1965 ועד 2008, הוא לימד באוני' אילינוי שבשיקגו. הוא היה ועדיין חבר מועצה מתמטית לתיאום בינ"ל ללימודי מתמטיקה ברחבי העולם, נשיא הועד לחינוך מתמטי באילינוי ועוד ועוד ועוד... איזי?

איזי: אתה יכול לחשב בעצמך עד כמה אני זקן. אומרים שאי שפיות היא דבר מורש. אתה מקבל אותה מילדיך. ילדי היו מוכנים ללכת לביה"ס ואשתי ואני רשמנו אותם לבי"ס חדש בקהילתינו, הוא נחשב טוב יחסית. בזמן ההוא לימדתי בנורת'-ווסטרן קורס מתקדם באלגברה והתכוננתי לכתוב מערך שיעור. כאשר המורים שלהם גילו שאני מתמטיקאי, הם ביקשו שאעזור לבחור את נושאי הלימוד במתמטיקה בביה"ס. עניתי בחיוב, ודבר מה שציינתי בפני אחת המורות (שאני עדיין מיודד עימה) היה עד כמה קל ללמד מתמטיקה בבי"ס יסודי לעומת ללמד סטודנטים לתואר שני, סיפרתי זאת ודאי זמן רב, ואני עדיין יכול לזכור את כל המורים שנכחו אז בחדר. מייד לאחר שאמרתי זאת, היא צחקה ושאלה האם אני מעוניין ללמד באחת הכיתות שלה. אני לימדתי תלמידי אוניברסיטה כיצד ללמד תלמידי בי"ס יסודי, ונחשבתי למורה טוב בנורת'-ווסטרן. נכנסתי לאחת מכיתות היסודי ונפלתי, כמו שאומרים, על הפנים. מתוך כל הרעיונות המבריקים שלי, דבר לא עבד. יצאתי מהכיתה ההיא מרוסק לחלוטין. ביקשתי לדבר עם ילדי הגן, מאחר והייתי סקרן ואחד הדברים שגיליתי, הוא שילדים אלו חושבים כמו מתמטיקאים. לימדתי קורס מאוד מתקדם באוניברסיטה מאוד נחשבת לסטודנטים איכותיים, והדבר שהיה הכי קשה עבורי ללמדם הוא כיצד לחשוב כמו מתמטיקאי. כאשר התחלתי לעסוק בכך, אחד המרצות במחלקה שלי ואני דנו בכך רבות. ראש המחלקה הציע- איזי, למה שלא תלמד את הקורס (המתקדם באלגברה) לילדי גן? וכך הגעתי לחינוך מתמטי. אחד הדברים שהדהימו אותי כאשר התחלתי לעבוד בתחום זה, היה שמתמטיקאים שואלים שאלות ואז מנסים לפתור אותן. במהלך הפתרון הם חושבים על מושגים ותפיסות חדשות ומתחילים לעבוד עימן. מורים למתמטיקה עונים על שאלות שהתלמידים אפילו לא חשבו לשאול. התוצאה היא שהם לומדים דברים שאין להם משמעות עבורם, ואנו סבורים כי אנו מלמדים אותם. מניסיוני כמורה, כל שיעור מתחיל בהצגת בעיה, ואני נוהג לפתח בעיות שסבורני כי יעזרו להם ללמוד. למשל, אחת הבעיות שאני נותן- ועשיתי זאת עם תלמידי יסודי, חט"ב ומוריהם- אנו מציג בפניהם את המס' הזה ומבקש מהם למצוא 2 מספרים שמכפלתם הוא 152, סכומם זוגי ומנתם אי-זוגית. הדבר הראשון שהם עושים הוא לתפוס במחשבוניהם ולהקיש מספרים. הם עונים מיידית- 2, 126. אני עונה- יפה, ומהם הפתרונות האחרים? הם בודקים שוב במחשבוניהם וחוזרים עם פתרון שני- 6 ונראה לי שגם 42. ומה עם פתרונות נוספים? הם עונים שלא. כיצד הם יודעים? הוכחה ע"י התשה. הם בדקו את כל המס' שהם מכירים, לא הצליחו לחשוב על נוספים, התעייפו מלחשוב על כך, ולכן תשובתם היא "אין עוד פתרון". ואני אומר- הבה נשנה מעט את השאלה. האם אתם מסוגלים למצוא פתרון בו הסכום אי זוגי, והמנה היא זוגית. הם בודקים במחשבונים ועונים 3 ו...ובכן, חשבו בעצמם את המנה. זה מורה טוב, נותן לכם לעשות את העבודה. ואז אני שואל- האם ישנם פתרונות אחרים? הם חוזרים למחשבונים ועונים, מותשים- לא, אין פתרונות נוספים. ואני שואל- מה עם 1 ו152? הם לא חשבו להקיש 1 במחשבונים שלהם. הם נוכחו לדעת שזהו אכן פתרון מתאים. המנה אכן תהיה זוגית והסכום אי זוגי. ואז אני שואל- מה עם סכום ומנה זוגיים? והם חוזרים שוב על התהליך המייגע ולא חוזרים עם תשובה. ומה עם סכום ומנה אי זוגיים? אותו הדבר. כעת, מצאו את המס' שנותן סכום אי זוגי ומנה זוגית. הם ענו מייד- 25, 4. 2,12 נותנים מנה וסכום זוגיים, וזהו. ביקשתי מהם לחזור ולענות על השאלות האחרות, והם חוזרים עם מס' תשובות נוספות. זה מעלה את השאלה: האם אתם יכולים למצוא מספר שיכול להוות פתרון לכל השאלות עד כה? הם ניסו שוב, והכרזתי- בואי נעיף מבט קרוב יותר בשאלה. הבה נגדיר מס' מושגים- אם מס' מחלק את 152 בצורה זוגית, נאמר שהוא גורם. לאחר מכן דיברנו על מכפלות של הגורמים. התחלנו לבחון בקפידה מה מאפשר פתרונות מסוג אלו. לאחר משחקים וניסויים רבים הם אמרו כי לא ניתן לקבל סכום ומנה זוגיים. אמרתי- זה מה שאתם אומרים. למה שאאמין לכם? אינני מאמין לאיש במתמטיקה. ישנו הבדל בין מצב בו אין פתרון, לבין מצב בו אתם מניחים כי אין פתרון. זה מעלה שאלות רבות לדיון. נתחיל לבחון גורמים ומכפלות שלהם, וההשלכות של כל גורם וסגולותיו. כפל הוא נושא שקל לי לדון בו עם אנשים צעירים, הרבה יותר משיקולי כוחות בפיזיקה. ואני אומר- הבה נתבונן על זה. כולנו יודעים מהו מס' זוגי ואי זוגי. ואני שואל- מהו מס' זוגי? מניסיוני, איננו באמת מבינים את ההגדרה במלואה כאשר היא ניתנת לראשונה, עלינו לעבוד עימה כדי להבינה ולראות שהיא הגיונית. באותו אופן, התלמידים יודעים כיצד לזהות מס' זוגיים ואי זוגיים, אך בסופו של דבר הם מגיעים להבנה כי 2 הוא גורם של מס' זוגי. אם 2 אינו גורם המתאים, השארית תהיה 1. ובמקרה זה, המס' אי זוגי. ונחזור לשאלה- מהו מאפשר את זה שהסכום של 2 מס' יהיה מס' זוגי? זה חייב להיות 2 מס' זוגיים או אי זוגיים. את זה הם הבינו בזריזות יתרה. בנוסף, הדרך היחידה ליצור מס' אי זוגי הוא ע"י זוג מס' שהאחד הוא זוגי והשני אי זוגי בלבד. במקרה כזה, הגורם הזוגי ייתן מנה אי זוגית ולהיפך. הם מתחילים להבין כי אם המס' האי זוגיים נותנים מנה זוגית, הרי שהמכפלה תהיה זוגית. כך שאין דרך בה הסכום וגם המנה יהיה אי זוגיים. זוהי דוגמה להוכחה, הם הלכה למעשה הוכיחו- אומנם לא הוכחה פורמלית, אך מתמטיקאי יוכל מייד להפוך אותה לפורמלית. הנק' היא שתלמידים אלו אינם בולטים במיוחד במתמטיקה, אך הם מתחילים לפתח את המשמעויות של מושגים מתמטיים, של מציאת גורמים, מס' ראשוניים, מכפלות וכו', והם מגיעים לרעיון כתוצאה מהצורך שלהם להשתמש במה שלמדו. זו הדרך בה גם מתמטיקאים מפתחים רעיונות חדשים. לדעתי עלינו לפתח בעיות מסוג זה, כאשר פתרון בעיות הוא היבט אחד, הם מתחילים לפתור את הבעיות ותו"כ הם מפתחים את הבנת המושגים שאנו מנסים להקנות להם. התוצאה שמצאתי היא שיש להם הבנה טובה ועמוקה יותר של הדברים, מאשר היכולת ללמוד אותם בע"פ ולדקלם. לסיכום, כאשר ביצעתי את הPHD פגשתי את אחד המרצים שלי בטורונטו, והוא אמר- לפני שתלך, תן לי לעוץ לך עצה. אל תחכה עד שתהיה מוכן לחקור. צלול פנימה והתחל בכך. לדעתי זוהי עצה נהדרת, ואני אומר לתלמידי- אל תחכו עד שתהיו מוכנים לפתור בעיות, התחילו לפתור ותהיו מוכנים במהלך העבודה. זה בעיקרון מה שברצוני לומר. אינני יודע אם זה מה שנקרא חינוך מתמטי, אך זה בסדר. תודה. אני רוצה להודות לטד, שאני מכיר שנים רבות וזה נחמד שהם רצו כה נואשות להפטר ממנו עד שהזמינו אנשים כמוני לבוא לכנס זה.

שלמה וינר, PHD, עוסק בלוגיקה מתמטית, ותיאוריית המודלים. הוא למד מ1972 באוני' העברית, ולאחר תקופה בארה"ב הוא חזר אליה ובילה שם את 30 השנים הבאות. לפני 8 שנים הוצע לו ללמד בפקולטה של אוני' בן גוריון ולעזור לייסד תוכנית בלימודי מתמטיקה וכעת הוא עובד באוני' בן גוריון. עבורי, דימויי המושגים של שלמה- אני פונה אליך כמושג לרגע- הם מעוררי מחשבה.

תודה, שלמה.

שלמה: תודה לך בוריס, ותודה לחברי הצוות שהזמינו אותי לכאן, ותודה מיוחדת לטד- תודה שאתה קיים ותודה שאתה בסביבה.

פתרון בעיות במתמטיקה ובחינוך מתמטי הוא כותרת של נושא, ואילו הכותרת שבחרתי היא חוסר הרלוונטיות של פתרון בעיות ע"י מחקר מתמטי לבתי ספר המלמדים מתמטיקה.

פרולוג: לרשותי עומדות רק 10 דקות, שמתחילות כעת, ולכן עלי לקצר ולפשט יתר על המידה, מה שנחשב ע"י אנשים מסויימים כשטחיות. אני מודע לכך ומוכן לשאת בתוצאות. בכמה מהקורסים שלי בלימוד מורים למתמטיקה, העליתי את השאלה- מהי מתמטיקה? הבדלתי בין מתמטיקה כתוצר ומתמטיקה כפעולה. מתמטיקה כפעולה היא חשיפה של מבנים מתמטיים, וחקירתם. השאלה אם זו המצאה או תגלית תלויה בביה"כ או בכנסיה בה אתה חבר. חלק מהמבנים נתגלו לפני מאות שנים, וחלקם חדשים יחסית. חקירת מבנים אלו היא תפקידם של מתמטיקאים. תוצאות מחקרים אלו הן התיאוריות לגבי המבנים. לכן, מתמטיקה כתוצר היא התיאוריות הנובעות ממחקרים- תיאוריות מספרים, קבוצות, משחקים, ורבים אחרים. מה מכל המכלול הזה יכול להוות חומר לימוד בבתי הספר? במרבית ביה"ס, תוכנית הלימודים קשיחה ובנויה מאלגברה, חישובים, גיאומטריה וטריגונומטריה. לכן, בד"כ ילמדו משוואות, זהויות, משפטים, חקירת פונקציות, וכל התיאוריות הקשורות לכך. פונטיקה היא פעילות המוגדרת ע"י פסיכולוגיה קוגניטיבית כפעילות של פתירת בעיות. פתירת בעיות בלימודי המתמטיקה בביה"ס היא פעילות שונה לחלוטין. כאשר אנו אומרים "פתירת בעיות" בהקשר של מתמטיקה של בי"ס, אנו בד"כ מתכוונים לבעיות תנועה. אינני בקי בהיסטוריה של חינוך מתמטי, ולכן אינני יכול לומר לכם מתי בדיוק בעיות תנועה נכנסו לחומר הלימוד של ביה"ס. בני דורי פגשו אותן כבר ברמת ביה"ס היסודי. הן הפכו לחלק גדול משיעורי הבית ומבחני המתמטיקה. בגלל צורת הלימודים המוסכמת והנוקשה, מעבר המבחן במתמטיקה הגיע לראש סדר העדיפויות של מורים ותלמידים. מטרת הלימוד העיקרית אם כך, היא שהתלמידים יעברו את המבחן. זה נעשה ע"י מתן "ארגז כלים" לתלמידים, בעזרתו הם אמורים לפתור את הבעיות המתמטיות בשיעורי הבית ובמבחנים. בעיות כאלו צריכות להיות שגרתיות וחוזרות על עצמן, בגלוי או במסווה. מדוע? כי אין זה הוגן לתת במבחן בעיה שאין לה אסטרטגיית פתרון בארגז הכלים של התלמיד. לכן, תלמיד שיתבקש לפתור בעיה שגרתית אמור שיהיו לו הדברים הבאים: האחד, מאגר של הליכים אפשריים לפתרון. נקרא לזה A. 2: מאגר מבנים מתמטיים מוכרים כך שיהיה ניתן לזהות את מבנה וסוג השאלה. נקרא לזה B. 3. יכולות מנטליות בהן הפתרון מותאם לבעיה מתמטית, לאחר שזיהינו את המבנה ואת התהליכים הדרושים לפתרון. נקרא לזה C. כאשר בעיה מתמטית X מוצגת לתלמיד, התהליך הבא אמור להתרחש:

1. תבנית הזיהוי B מופעלת ע"י X. מופעל תהליך ניתוח שמזהה את התבנית של X.
2. סכמות בחירת הפתרון C מופעלות ע"י סעיף 1. נבחר הליך פתרון. נקרא לו Z.
3. Z מיושם על X ומפיק לנו פתרון עבורו.

אני משתמש בשגיאות דו כיווניות כדי להבחין מתי התהליך הקוגניטיבי עובר בין שלב לשלב, במקרה שפותר הבעיה נתקע או מגיע לפתרון. מעבר בין שלבי פתרון הבעיות לא נראה כאתגר אינטלקטואלי גדול, אך עלינו להיות מרוצים שהוא תקין אצלינו. תלמידים רבים נכשלים במעבר בין השלבים. לעיתים קרובות הם בוחרים באקראי תבנית הנראית להם כמתאימה בשל הנחות שגויות ואסוציאציות לא מבוקרות. פסיכולוגים בימינו מדברים על 2 מע' חשיבה שהם מכנים "מע' 1" ו"מע' 2". המע' שתיארתי כרגע היא מע' 1. למרבה הצער, אפילו בשימוש במע' זו, פתרון נכון לא תמיד יושג. פותרי בעיות טובים הם אלו שאינם ננעלים על הפתרון הראשון שעולה בראשם, למקרה שאין הוא מתאים, הם מסוגלים לאבחן תהליכי פתרון לא מתאימים, ולשקול הליכי פתרון נוספים שעשויים להיות יותר רלוונטיים ולעיתים גם לא רלוונטיים במבט ראשון. יש להם יכולת גמישות מחשבה ומאגר אסוציאציות עשיר. חלקנו מאמינים כי נוכל לאמן את תלמידינו להיות גמישים כדי שישפרו את מיומנויות פתרון הבעיות שלהם. עם זאת, לימוד בעיות לא שגרתיות בצורת הפתרון שלהן הוא, לדעתי , אוקסימורון- פתרון בעיות לא שגרתיות הינו מחקר מתמטי, הפותר או הפותרת צריך להתמודד עם בעיה שעבורו, המבנה, אסטרטגיות הפתרון והשילוב ביניהם לא קיים אצלו ב"מאגר". ישנן דרכים ספורות המומלצות לצורך ביצוע מטלות מסוג זה. כדוגמת הפתרונות בספר של ווינסטון ספואז NAME. עם זאת, העצה שניתנת שם אינה מבטיחה פתרון לבעיה. אנו יכולים להנות מהדרך היצירתית בה תגליות מתמטיות מתרחשות, אנו יכולים לקרוא בעניין רב ספרים שנכתבו ע"י מתמטיקאים וכו'. עם זאת, אין זה רלוונטי כמעט לפתרון בעיות מתמטיות במתמטיקה הנלמדת בבתי הספר. זה לא רלוונטי עבור רוב המורים והתלמידים. אין הם צריכים להיות מעורבים בכך.

אפילוג: לשם מה נועדה ההשכלה המתמטית? שאל אנדרווד דאדלי NAME , פרופ' למתמטיקה במאמרו. תשובתו היתה- השכלה מתמטית נועדה מאז ומתמיד ללמד סיבתיות, בד"כ דרך בעיות מטופשות. דוגמא לבעיה טיפשית כזו היא: 5 פורעי חוק חילקו שלל ביניהם, כך שסכום 2 החלקים הקטנים יהיה שליש מהחלק הגדול. אם כך, מדובר במשחק. אם נקבל זאת, ההסברים המרתקים של אריתמטיקאים דגולים שגילו תגליות מופלאות, האם הם רלוונטיים להשכלה מתמטית בביה"ס? תודה.

בוריס: הועד המארגן הציע שמנחי הפאנל הזה יקבלו אף הם 10 דק' להערותיהם הפותחות. וקרה שבמהלך ההתכתבות שלנו, שלמה הציע שאני אנאם אחרון בפאנל, כמובן לא כדי לנסות לסכם משהו, אך עלי להתוודות שהערותי תאמו פעמים רבות את הפאנליסטים שנאמו לפני. אז מטרת ההערות שלי היא לשאול מס' שאלות, שאני מקווה כי יהיו שימושיות בדיון שלנו, ובמובנים מסויימים, יתאימו לבעיות שהוצגו ע"י חברי הפאנל. לפני כן, אני מעוניין לומר מס' מילים על פתרון בעיות כתחום מחקר. יהיה זה יעיל להשתמש באבחנות שצוינו כאן מאז הבוקר- פתרון בעיות במשמעות של "לעשות" מתמטיקה, פתרון בעיות כחלק מהותי בהשכלה מתמטית, ופתרון בעיות כתחום מחקר. אצמצם מאוד בדברי ואביע את דעתי על התפתחות פתרון הבעיות כתחום מחקר. חשבתי על שם חלופי עבור הפאנל שלנו- כמו פתרון בעיות ופתרון בעיות- היכן ניפגש? זהו ניגוד לקיפלינג, מזרח הוא מזרח ומערב הוא מערב, היכן הם ייפגשו? (זהו ציטוט מקיפלינג). לדעתי, השאלה שלי חיובית יותר- כי התשובה היא כנראה שהם ייפגשו, לאחר שנצליח לגשר על הפערים בין הקהילות, כפי שאנו מנסים לעשות בכנס זה. שמו של ג'ורג' פוליה הוזכר היום לפחות 5 פעמים ע"י דוברים שונים, ובדקתי באינטרנט- ספרו תורגם לפחות ל17 שפות ויותר ממיליון עותקים נמכרו. על המסך ניתן לראות את 4 הפנים המפורסמות של פוליה, הבנת הבעיה, הכנת תכנית, ביצע התוכנית, ובדיקה. זה נוסח לא ב1945, אלא בספר מוקדם יותר שנכתב עם סנדרסגו NAME, ב1925 אם אינני טועה, אך לקח זמן רב עד שרעיון זה הופץ, בעיקר ע"י מתמטיקאים, שחשו כאילו מישהו ביטא במילים את מה שאני עושה. אם אתה רוצה לחנך מתמטיקאים מוצלחים, עליך להסביר ולעשות את תהליכי הלמידה ברורים לאנשים רבים, וזה יעבוד. לרוע המזל, זה לא עבד. ארבעת השלבים של פוליה מוגבלים מאוד ביעילותם, לאחר שנות דור, ככלי לשיפור מיומנות של אדם בפתרון בעיות. מצאתי בדיחה באינטרנט, לצערי איני יכול להתייחס למקורה: אם ננסה לענות על השאלה "כיצד לעשות מיליון דולר" ונפעל לפי 4 השלבים של פוליה, השאלה תהיה רלוונטית לחלוטין. אך כפי שידוע לכולנו, אין זה מספיק כדי להרויח מיליון דולר, וכאבסורד, נסיק כי ידיעת השלבים של פוליה אינה מספיקה גם כדי להפוך לפותר בעיות מוצלח יותר. התמונה הרבה יותר מורכבת.

ידיעה מעט יותר רצינית- פותרי בעיות בימים עברו היו נחושים לנסות לגרום לתיאוריות שלהם לעבוד, כדי שהמתמטיקאים יעבדו למען המוסדות הציבוריים, כולל תלמידים בעלי יכולות שונות. ברצוני לציין 2 ענפים מחקריים- הראשון היה על פתרון בעיות מתמטיות, שנתן לנו תובנות רבות ואבי טיפוס למחקרים, שנוסד ע"י אלאן שוינפלד NAME, הידוע מאוד בעולם, אך במילותיו של שוינפלד עצמו, ואני קרוב מאוד למה שכתב במאמרו מ1992, שמחקר על פתרון בעיות מתמטיות, שימושיות מחקר זה בלימוד המתמטיקה לא הוכחה מעולם. לאחר מאות מחקרים, אין לנו הוכחה סופית שמחקר על פתרון בעיות אכן ישים בלימוד. היתה זו תקופה של מחקרים סטטיסטיים, כך שישנה קב' ניסוי, קב' ביקורת, מטרה ללמד תיאוריה כלשהי, ובדיקה לראות מה מתרחש תחת תנאים מסויימים. למשך זמן מסויים, היתה זו אכזבה. הזכרתי את שמו של המברי NAME שפרסם ב1992 שיטות ניתוח של כ480 מחקרים על פתרון בעיות, והמסקנה הכללית, שספגה ביקורת מג'רי, היתה שישנו חוסר תועלת כאשר אנו משתמשים בשיטות של פוליה בפתרון בעיות. ענף מחקר נוסף, שרוזה הזכירה בהרצאה, שוב, מאותה תקופת זמן, עוסק בקשר שבין יכולות אינטקלטואליות ומיומנויות בפתרו בעיות מורכבות. נשמע הגיוני ביותר, שככל שאדם חכם יותר, למשל לפי ציון IQ – כך הוא טוב יותר בפתרון בעיות מתמטיות. כמובן שאין זה נכון, רוזה נתנה לנו דוגמא לכך. מחקרים אלו הותקפו בעבר פעמים רבות, בד"כ ההתקפות היו על בסיס השיטות שהשתמשו בהן בניסויים. חוקר מתחיל לפקפק בנכונות ויעילות השיטות שהשתמשו בהן קודמיו בתחום המחקר, ותוצאות מחקר רבות נותרות חסרות הגנה וביסוס. תהליך זה קיים גם היום, ויתקיים גם בדור החוקרים הבא. במחקרים רבים משתמשים בז'רגון מקצועי-טכני שאינו מובן כמעט לאיש פרט לקב' מצומצמת העוסקת בתחום מחקרי מסויים. בשל השימוש במילים אלו (שאומנם תואמות להפליא את הדבר אותו הן מגדירות), הנגישות והבנת השפה בה נכתבים המחקרים יורדת, ונוצר פער גדול בין תחומי המחקר השונים. יש לצמצם מעט את השימוש בז'רגון כזה, במטרה להנגיש מידע ליותר אנשים וליצור שפה משותפת בקהילה המדעית. הדור הבא עסק בנורמות, עברנו, כתחום מחקרי לחקר האינטראקציה בין תחומים מתמטיים, שזה נהדר ומלא תובנות, אך דור חוקרים זה, לדעתי האישית, ואינני מנסה להעמיד פני אובייקטיבי, נמצא הרחק מדורות ידע קודמים, בכיצד מתמטיקאים פותרים בעיות, כיצד מחוננים פותרים בעיות, ומה ניתן לעשות עם זה. לדעתי, בגלל פערים אלו יש כאן סיבה לחוסר שימוש בתוצאות מחקרים שנערכו בעבר. ומה מתרחש כעת? קשה לומר, במהלך העשור האחרון, פתרון בעיות אינו עומד בלב המחקר המתמטי ומחקר החינוך המתמטי. ניתן למצוא מחקרים שבמפורש עוסקים בפתרון בעיות, היו מחקרים בפתרון בעיות מיוחדות במקומות מסויימים, אך איכשהו קיבלתי את הרושם ש... ואני מצטט מהדף של יאנה NAME, על הזהות החמקמקה של פתרון בעיות. התחום רחב מידי, זה מה שמפריע, ולא ממש ברור מה יהיה הצעד הבא. לכן, נראה כי תחום המחקר על פתרון בעיות מתמטיות נדמה כנמצא על פרשת דרכים. ישנן יותר מידי שאלות פתוחות, כמו שאלות מהתחום הקוגניטיבי של פתרון בעיות, כמו כיצד תכונות שונות של פתירת בעיות באה לידי ביטוי במוח, ואין לכך תשובה (עדיין). אין עדיין מחקרים רבים שחוקרים שאלה זו, אז אולי רצוי לחזור ולעסוק בשאלות על ייצוגים (וכו') ולנסות ולהמשיך לחקור את מה שנעצר לפני למעלה מעשור. דבר נוסף, אפשר להישיר מבט קדימה ולחפש זויות מבט חדשות, כמו פסיכולוגיה קוגניטיבית, נוירולוגיה, חקר המוח, אנתרופולוגיה שעדיין לא נחקרה בתחום פתירת הבעיות, ואני מעט חושד כי פתירת בעיות עלולה להיעלם כתחום מחקרי, מאחר ורבים שמשתמשים ולו רק במינוחים של פתירת בעיות במחקרים בתחומים אחרים (כמו אלגברה, גיאומטריה וכו'). זה מקובל אם נרצה להיות ברורים יותר ונימנע מלהשתמש במינוחים לא נפוצים שהשתמשו בהם בעבר. כך אני מרגיש שזהו המצב כעת, וזה מותיר מרווח לשאלות- מה אנו באמת יודעים על הדרך בה מתמטיקאים ומחוננים פותרים בעיות, וכיצד נוכל ליישם ידע זה? כיצד נוכל לפתח שפה משותפת כדי לדון על פתירת בעיות? כיצד אנו יודעים שמתבצעת למידה דרך פתרון בעיות? (כפי שנאמר כבר ע"י חלק ממשתתפי הפאנל). וכמובן, בהינתן הניסיונות האחרונים לפתח נגישות טובה יותר למתמטיקה בבתי הספר, באיזה תחום מחקר כדאי לבדוק כיצד לפתח נגישות זו, וכיצד נפתח אותה. השאלות הללו פתוחות. תודה.

היה לנו הסכם עם חברי הפאנל שהם יוכלו להגיב בקצרה האחד על דברי השני, האם אתם מעוניינים בכך?

ג'ראלד: מס' הערות קצרצרות- קראתי ספר קצר על כיצד לפתור זאת, שמהווה לדעתי מעין ראיה שהידע של מתמטיקאים דגולים אינו מספיק. אותו סופר כתב גם 2 כרכים עם פרטים רבים, אחד מהם נקרא "דפוסים של מסקנות סגורות", (את שמו של השני איני זוכר,) עם הרבה דקויות , עד שאפילו הסופר אמר כי זה אפילו לא קרוב ללהיות מספק. הערתי השניה היא, כאשר דיברנו על מחוננות, תמיד עולה לי השאלה- האם ניתן ללמד מחוננות? המילה מחונן, לפחות באנגלית, מקבלת משמעות חזקה של משהו מולד. ייתכן שישנם דברים בכך שהם מולדים, אך אין זה אומר שדברים שאדם מסויים נולד עימם לא יכול להירכש בלמידה ע"י אחר. אני מעוניין לפתוח אפשרות זו לדיון.

בוריס: תודה. איזי? רוזה?

רוזה: במחקר שלנו, בו מדובר על מחוננות, איננו סבורים כי אנו יכולים לפתח מחוננות (אצל אדם שאינו מחונן), אך אנו יכולים לזהות מחוננות וללמד את המחונן לפתח את יכולותיו. לכל תלמיד יש פוטנציאל אינטלקטואלי ברמות שונות, ולכל תלמיד ניתן לספק או למנוע אפשרויות להכיר ביכולותיו ולפתחן.

בוריס: תודה. דיוויד?

דיוויד: האם יותר לי לפתוח בשאלה? שמי דיוויד, אני מאמין. כך כתבתי על תג השם הבוקר. אשאל תחילה ואעיר. השאלה היא, לא על איזו פלנטה את נמצאת, אלא באיזה עולם את חיה. ואני רציני לגבי זה. יש לנו פה מעין קיבוץ גלויות, בשיחה זו עם טד. שמי דיוויד טל אך אינני יהודי. הנקודה היא שבמהלך 6 השנים האחרונות, עבדתי עם ארצות הUPAK במחקר לזיות CORRECT???. חקר לזיות CORRECT??? הוא על למידת מתמטיקה ע"י שימוש בפתרון בעיות מתמטיות. שימוש בפתירת בעיות, אך הנושא הוא לא פתרון הבעיות עצמו! אם תסתכל באתר האינטרנט שלי, תראה לזיה CORRECT??? שתיארתי, בילדים בכיתות רגילות למדי, שלומדים כיצד לכפול 3 פעמים 23. אני משתמש בפתרון בעיות, ומה שילדי הכיתה לומדים הוא שהדרך הטובה ביותר לפתור את הבעייתי היא להשתמש ביחידות טנזין CORRECT???. הם ניסו כל מיני דרכים, כמו לחבר 3 טורים של 23. אני מרגיש שאין זה נכון כלל להגיד כי אי אפשר ללמד דבר. ניתן ללמד דברים רבים. איני יודע על איזה כוכב לכת את, אך העבודה שנעשית בפועל, בסינגפור, למשל, או עבודתו של מסאמי איסודה NAME ביפן, ומקומות אחרים, בסינגפור למשל- אומנם יש להם כרגע מרכיבים של פתרון בעיות במבחנים שלהם, אך אני אומר בכנות, אתם כ"כ רחוקות מהמציאות, עד שאיני יודע על איזה עולם אתם חיים. צר לי לומר זאת, אך זה מה שאני חושב.

בוריס: כתבתי מס' שאלות נוספות, אך אני חש צורך לענות בקצרה על כך. מעולם לא חשבתי שלא ניתן ללמד פתרון בעיות.

ברקע- דיוויד- אני מדבר על שימוש בפתרון בעיות כדי להבין מתמטיקה.

בוריס: אני מודע ללקח על הכפלת 3 ב23. אני משתמש בזה באחד הקורסים שלי ואני מסכים איתך- זה אכן עוסק בפתרון בעיות. אני מכיר את עבודתו של איסודה NAME, זה פורסם במגזינים חשובים. עבודתי שלי היא על לימוד פתירת בעיות. כוונתי היתה לומר ששיטות ישירות המשתמשות בכלים הללו אינן עובדות. ג'רי הזכיר מנגנון המעורב בפתירת בעיות אצל מומחים שניסו לפענח כדי להשתמש בו בכיתה רגילה. זה מה שרציתי לומר, אני מתנצל אם הייתי פרובוקטיבי מידי.

דיוויד-עוד לא קיבלתי את הזריקה שלי עדיין ברגל, ישנו מאמר מעניין שכתבתי, אולצתי לצמצם במס' העמודים שהוא השתרע עליהם, הוא נחשב ארוך מידי, וכתוב בו כך: נתייחס לספר "כיצד לחשוב באופן מתמטי" (נכתב ע"י ג'ון מייסון NAME), עברתי על הספר הזה. הוא לא מלמד איש משהו חדש במתמטיקה, אך הוא משנה את הגישה בה פותרים בעיה מתמטית. על בסיס זה, אנו משתמשים ב16 שאלות כדי לומר דברים כמו.. אינני זוכר אף שאלה מאחר ואין לי מוח, אך בכלליות, השאלות הן על- האם תפחד כאשר תיתקל בבעיה חדשה, וכו'. שאלנו את השאלות הללו סטודנטים לפני ואחרי שהם קראו את הספר, כדי לבחון לאיזה כיוון הם נטו. שאלנו גם את צוות האוני' לאיזה כיוון הם סבורים שהסטדנטים ייטו, ולאן הם מעדיפים שהסטודנטים ייטו. במילים אחרות- יש לנו תחושה שמה שהצוות היה מעדיף בבירור הוא שהסטודנטים יפתחו גישה חיובית יותר למתמטיקה. כאשר הסטודנטים חזרו ללימודיהם באוני', הגישה שלהם התהפכה חזרה בגלל שיטות הלימוד של המתמטיקה באוני'. זה כל מה שיש לי לומר בנידון. ולא אדבר יותר.

בוריס: זלמן?

זלמן: שמי זלמן אוסיסקין, רציתי להתייחס לשאלתך הראשונה לפאנל, על ההבדל בין מתמטיקה של מתמטיקאים ומתמטיקה בביה"ס. נראה לי כי ישנו הבדל מהותי. כאשר אנו מלמדים פתרון בעיות בבי"ס, זה בד"כ כי ישנה קב' בעיות שהיינו רוצים שהתלמידים יצליחו לפתור. היינו רוצים להפוך את הבעיות לתרגול, להקנות לתלמידים יכולות כלליות שניתן ליישמן על כל הבעיות מסוג זה. כאשר אנו פועלים כמתמטיקאים, איננו יודעים אם קיים פתרון לבעיה. הבדל קטנטן זה- הידיעה שיש לך פתרון או אין- זה משנה את כל התפיסה בדרך מסויימת. אם תדע כי מישהו פתר כבר את הבעיה, נעשה הרבה יותר קל עבורך לפתור אותה גם. זהו, לפחות, הרושם שלי. נק' שניה- ההבדל בין מתמטיקאים- לדעתי בקרב המורים למתמטיקה יש בודאי מחוננים לא מעטים. לדעתי, בקרב מתמטיקאים ישנה התחושה שהמחוננות היא מולדת. למורים למתמטיקה יש את עוצמת הלימוד וההנחיה, שכן זהו תחום המומחיות שלהם. אציין רק כי ביתי למדה מוזיקה דרך סוזוקי NAME, ולסוזוקי היתה אותה גישה כלפי מוזיקה כפי שלאנשים רבים יש כלפי מתמטיקה. לפני סוזוקי, זה או ש"היה לך את זה" או שלא. לא יכולת ליהפך למוסיקאי מחונן, אלא אם היתה לך תכונה מולדת לכך. השקפתו של סוזוקי נבעה מכך שהשפה היפנית קשה ללמידה למבוגרים, אך כל היפנים ביפן למדו יפנית. אז השאלה היא- אם מתחילים מוקדם מספיק עם סוג הפעילויות שעוסקים במה שדרוש למחקר מתמטי, ואינני מתכוון ללמד מחקר מתמטי, אלא ללשאול שאלות פתוחות, ודברים מסוג זה, שאולי תלמד מכך. ניתן ליצור כישרון – סיפור קצר- נתבקשתי פעם אחת בלבד לדבר בכנס העוסק במחוננות, מאחר והבעתי דיעה זו. הם מעולם לא הזמינו אותי שוב.

קהל: יש לי שאלה לשלמה. בהתחלה תיארת מתמטיקה כתוצר במובן של תגלית או הבנת מבנה מתמטי. עם זאת, לא שמעתיך אומר שזה ממלא מקום בתוכנית הלימודים של ביה"ס.

שלמה: נדמה לי שאמרתי כי ישנה תוכנית לימודים קלאסית בה אנו אומרים לתלמידינו מס' דברים על גיאומטריה, אלגברה, חשבון, וזהו, זה התוצר. אנו מכירים להם את המבנים הקיימים שנתגלו במהלך מאות שנים.

קהל: האם אתה מכיר מסגרות בהן ניתנת לתלמידים הזדמנות לגלות או להבין מבנה מתמטי?

שלמה: לא, אולי במסגרות מיוחדות למחוננים וכו'. אין זה דומה למוסיקה, בה אתה לוקח ילדים צעירים, ומלמד אותם לנגן את מוצרט. במתמטיקה אתה מלמד ילדים מה שקיים ובגיל 18 או יותר הם מגיעים למחקר מתמטי. בד"כ הם לא ממציאים מבנים חדשים, אך הם מחברים תיאורית משחקים, לעיתים נדירות ישנם ממציאים כגון נורברט וינר. זהו הקו הבסיסי.

קהל: הסיבה שאני שואל היא כי כרגע אני מעורב בפרוייקט המנסה לפתח הזדמנויות ללמידה וכו'.

טומי דרייפוס: למעשה השאלה הזו מופנית גם לאיזי, שלמה ודיוויד, האדם הקודם היה הייוון מאס NAME. שמי הוא טומי דרייפוס, ברצוני להתייחס למה שקודמי אמרו. לדעתי דיברתם איכשהו על דברים שונים מאוד. האחד הוא ללמד פתרון בעיות מסוג מסויים, והשני הוא לנצל את פתרון הבעיות כדי (אני קצת מפחד לומר זאת) לומר שאנו ממציאים מתמטיקה. הייתי רוצה שחבר פאנל יענה לי על כך.

איזי: האם מותר לי להביע את דעתי? אני משתמש במצבים בעייתיים בהם התלמיד משתתף בפתרון הבעיה כדרך להצגת מתמטיקה. אני מתנגד להתנגדות התלמידים למתמטיקה. מצאתי כי אם תספק בעיות מעניינות, הם נעשים מעורבים בהן, ותו"כ הם נאלצים להכיר את המושגים המתמטיים שאני שואף להקנות להם.

קהל: שמי יאנה. בכנס זה יש לנו מקור לדאגה. מניסיוני אני יודעת, כי אם נסתמך רק על פתרון בעיות להבנת תיאוריות בחינוך המתמטי, נחמיץ הרבה מעבודתם של מתמטיקאים באוני'.

ניצה: שמי ניצה מובשוביץ הדר. ברצוני לחלוק מניסיוני בקצרה. במשך 12 שנים הייתי מורה במשרה מלאה בבי"ס תיכון. לאחר שנתיים, הוזמנתי ע"י הטכניון למלא מקום עבור שמואל אביטל. בהרצאה הבוקר בבר אילן, אנשים אמרו כי הם שכרו מורה מנוסה. זו הסיבה שנקראתי לטכניון- להיות המורה שמלמדת מורים. לא ידעתי כיצד להגיב, אך במקריות רבה גיליתי כיצד לפתור זאת- אימצתי זאת כמורה ולא כפותרת בעיות- והצעתי לסטודנטים ללמוד זאת בע"פ ולתרגל, והם דיווחו לי שהם אימצו זאת כשיטת לימוד למעין דיאלוג סוקרטי בכיתה. שימוש בכך היה יעיל עבור הסטודנטים, לכן רציתי להגיב על כך, כי זה לא רק פותר הבעיות, אלא- אהבתי מאוד את דרך ההצגה שלך לחוסר היעילות בפתירת בעיות- כמו בשאלה שלך על מיליון הדולר...

בוריס- לא אמרתי כי זה עשוי להזיק, התכוונתי כי ישנן דרכים לשימוש לא נכון בזה בעת לימוד כיתה.

ניצה: סליחה על שפירשתי אותך לא נכון, רציתי להציע זאת כדרך אחרת של שימוש בפרש-התנהגותיות.

בוריס: תודה. יש לנו זמן בדיוק ל3 שאלות. פט בבקשה. שמך לפרוטוקול?

קהל: שמי פט תומפסון מאוני' אריזונה. ברצונה להציע אבחנה שקיימת בפתרון בעיות, תרתי משמע. שאלתי היא, עד לאיזה גבול אתם מסכימים על אבחנה זו. נוציא מהכלל את ההתייחסות לגרשון מ2008 ולמאמר של מרטי מ2010, אינני זוכר את האחרון, פתרון בעיות נכשל לדעתי באבחנה בין 2 צורות פעולה בפתרון הבעיות. האחת היא הניסיון להיזכר בתהליך כדי לקבל תשובה, או ליישם שיטה שנוסתה כבר בעבר כדי לקבל תשובות, אך המטרה היא בכ"ז לקבל תשובה. השנייה היא אבסטרקטיות רפלקסיבית. מהמקום בו מרכז הפעילות משפיע על תובנות פנימיות שהוביל להתקדמות, במהלכה התרחשה הפעילות. הניסיון לראות מה ניתן להכליל מהפעילות . דעתי היא בספרות על פתרון בעיות נק' זו מכשילה אותנו שוב ושוב, או, שלדעתי כאשר הדגש תומך במבנה מולד, כאשר הדגש הוא על התובנות, התנאים ומה היה הדבר שהוביל לפריצת הדרך, זה עשוי להיות יותר יעיל יותר עבור לימוד מאשר הגישה הקודמת. אני מעוניין לשמוע את התייחסותך.

בוריס: זה פשוט מאוד, אני מסכים עמך. הבה נמשיך עם השאלות ואם יהיה זמן נוסף בסוף אתייחס עוד.

קהל: שם- פרנסיס לבנטל אוני' מונז', בלגיה. אני מעוניין לחזור על הנקודה שלך שעדיין נמצאת במוקד. כיצד ואיך אנו יודעים שלמידה מתרחשת דרך פתרון בעיות? אני רוצה להתייחס לעבודה שנעשתה ע"י פרדריקה NAME, שמה כבר הוזכר היום, בשנות ה70. בזמן שהיתה בSNP. היא יצרה רעיון של סיפורים בלשיים ורומנים בלשיים. מידע המאוחסן באופן לא מילולי היכן שעליך למצוא את הנבל בעלילה, והאלו הם המספרים הנעלמים. אם תנסה לפענח מי הנבל בסיפור תבין את המשמעות המתמטית, כפי שציין היום מוקדם יותר יורי שאת שם משפחתו איני זוכר. אני משמתש בתכונה זו לאחרונה בצורה שאיזי הזכיר, איזי אמר בבירור כי בלימודי מתמטיקה, מורים נותנים תשובות לשאלות שכלל לא נשאלו. אנו משתמשים בזה במצבי משחק כדי להבין בטבעיות שאלות, ובנוסף לכך אנו מבקשים ילדים בבי"ס יסודי ליצור את הסיפורים שלהם ולהחליף את הסיפורים, במטרה לתת לנו ולילדים אחרים לבדוק את הפתרון. זה אומנם יוצר מעט בלגן בכיתה, אך זה היה מאוד מעניין וגם עבד. כיצד נדע שזה אכן עבד, וכעת אני פונה לג'ראלד, אנו מנסים למדוד ע"י מבחנים קוגניטיביים את המבנים הקוגניטיביים, או איך שתרצה לקרוא להם אם אינך מוכן לכנות אותם כך. יש לנו גם האפשרות להשתמש בזה ברמות שונות, תלמידים שהתקשו בהתחלה יקבלו הכנה איטית יותר, ותלמידים אחרים יקבלו רמה מתקדמת יותר. בסופו של דבר, כולם יהיו ברמה גבוהה יותר. בכל המקרים, התרחשו התקדמויות. רציתי לציין זאת כי זה סותר את נק' מס 3 שלך.

בוריס: תודה.

קהל: אבי ברמן, טכניון. ברצוני לומר משהו קיצוני, ורציתי לבקש מהפאנל להגיב. אני מציע, כי כל המתמטיקה, החל מלפני גן הילדים, יכולה להילמד ע"י פתרון בעיות, אך אין זה יעיל במיוחד מאחר וזה גוזל זמן. אם אני טועה בהצהרה הראשונה אנא תנו לי דוגמאות, אם אני צודק בראשונה וטועה בשניה, אנא אמרו לי מה צריך להיות היחס ובאיזה אופן כדאי להשתמש בפתרון בעיות ככלי לימודי.

בוריס: תודה. ובכן, יש לנו כ8 דקות לתגובות המערכת, להצהרות סגירה,לשאלות עליהן אנו מעוניינים לענות, וזה נהדר מאחר שזה רק היום הראשון של הכנס, אני בטוח שיהיו לנו הזדמנויות נוספות לשוחח על כל השאלות הללו אם דבר מה ישאר ללא תגובה כרגע. אז מי מעוניין להתחיל?

WHO IS SPEAKING NOW??? ובכן, אני מסכים שהאבחנה היא מהותית, רמזנו על כך מס' פעמים, זה מה שניסיתי להשיג במחקרי באוני' רטגרס. זה מה שניסיתי להסביר ב2 הנק' הראשונות של דברי, שניתן לחשוב על פתרון בעיות כפעילות הכוללת רכישת יכולות לפתור סוג מסויים של בעיות, או לחשוב על כך כפעילות שדרכה ניתן ללמוד מושגים מתמטיים. אלו הן 2 נ' מבט שונות מאוד. אני מאמין כי מתקיים שיווי משקל בין השקפות אלו, איני מתנגד ללימוד דרך פתרון לבעיות מסוג מסויים ולהפכן לבעיות שגרתיות, אני סבור כי זה חשוב, אך אין זה הדבר החשוב היחיד. לפי המצב כיום, נדמה כאילו זה יהיה הדבר שלימוד מתמטיקה בביה"ס הופך להיות. מה האיזון המתאים בין לימוד מתמטיקה ישירות ולימוד פתרון בעיות? לדעתי, התשובה היא שזה מושפע. זה כמו לשאול במוסיקה- מה האיזון המתאים בין שירה לנגינה? עלינו להגיע ללמידה מספקת דרך פתרון בעיות, ועדיין לשמר סקרנות, לפתח את העניין של הילדים ולענות על שאלות שהם אינם מצליחים למצוא להן את התשובה, לתת להם לרכוש ביטחון, יש להם את היכולות לפגוש מבוי סתום ולהתגבר עליו, הם יכולים לרכוש חוש מידה עד כמה השאלה היא קשה, לעמוד תחת לחץ אם השאלה היא קשה, והלחץ יכול גם להיות מאתגר כי השאלה מעניינת אותם (דבר שלא קורה בד"כ בבעיות שגרתיות). כל אלו הן תוצאות של מטרות. אם אנו מבצעים פעילות מספקת של פתרון בעיות, ולימוד מתמטיקה דרך פתרון בעיות כדי לפתח ולשמר את ההתלהבות המגיעה מהבנת המתמטיקה וכוחה, אז ניתן לומר שיש לנו כמות מספקת של לימוד מתמטיקה כך שנוכל להרשות ללמד מתמטיקה בדרך יותר יעילה, ולא ניתן לכל ילד להבין לבד כל מושג (דהיינו, ללמוד לפתור בעיות ולא לחכות שהיצירתיות של הילד תעשה את העבודה).

תודה.

איזי ויינצווייג: אני מעוניין להצביע על 2 דברים: פעם השתתפתי בכנס על טופולוגיה אלגברית. אוני' אילינוי- עוד אגיע לשם! מישהו נכנס לכנס להכריז כי בחור רוסי בדיוק פתר בעיה מסויימת, מייד התיישבתי ליד שולחני והוכחתי את התיאוריה. התבונני סביבי וכולם עשו בדיוק כמוני. סברתי כי זה מעניין, אז כאשר חזרתי לאוני', סיפרתי זאת לתלמידים. השאלה הראשונה היתה- מדוע אתה לא הוכחת את התיאוריה? היא היתה יכולה להיות שלך. עניתי- אני לא חשבתי על השאלה. האדם שיצר את השאלה הוא זה שצריך לזכות בהילה, מהרגע שהשאלה קיימת, לענות עליה הוא כבר תהליך קל יותר. עוד דוג' לדברים מסוג זה, היה מחקר שאני זוכר כי קראתי, ואחת השאלות היתה: ג'וני ו4 מחבריו נכנסו ליער וחזרו עם 25 אבנים, והם חילקו אותן ביניהם. כמה אבנים כל אחד צריך לקבל? התשובה הנפוצה בקרב הילדים היתה 5. לו היינו שואלים את השאלה בדרך שונה מעט, היינו מקבלים תשובה שונה. השאלה המרכזית היא- כיצד נשאלת השאלה? מהו הניסוח? דאגתי היא לקבל סטודנטים שלומדים מתמטיקה, אני עובד הרבה עם רמות בי"ס יסודי, ומצאתי שוב, כי שאלות הנשאלות נכונה נותנות לתלמידים לפתח את המושגים שהם צריכים כדי לפתור את השאלה. מהרגע שהם עושים זאת, יש להם שליטה מסויימת במושגים אלו, והם יכולים להשתמש בהם. המושגים שייכים להם. החלק הקשה הוא להמציא את הבעיות המתאימות. לא תרגולים אלא בעיות מעניינות, שילדים יוכלו להשתייך אליהן, נתתי דוג' אחת מהחביבות עלי, אך יש לי אוסף שלם של בעיות מסוג זה, ובד"כ, כאשר אנו פותרים אחת מהבעיות הללו, הילדים מאוד מתרגשים מכך. אני מתכוון לילדים מכל הגילאים- חט"ב, יסודי וגן. הם מתרגשים כי הם מעולם לא חשבו כך על מתמטיקה, והם לא עשו מתמטיקה בדרך זו, אני מנסה לגרום להם, כפי שאני אומר, לעשות מתמטיקה.

בוריס: תודה.

רוזה לייקין, אוני' חיפה: אם יורשה לי, אני רוצה לענות על מס' הערות- זלמן, עם רמות המחוננות והיצירתיות. אני חושבת שכאשר אנו מדברים על מתמטיקה של ביה"ס, תגליות מתמטיות יכולות להיעשות ברמות שונות. מס' מושגים אכן יכולים להילמד ע"י פתרון בעיות וחלק צריכים הנחיה שיטתית כדי להילמד. אינני סבורה כי עלינו לגלות כל מושג מתמטי או כל הליך מתמטי. חלק מהם צריכים להיות מוצגים ע"י מורה וחלקם יכולים להוביל לתגלית. גם בעיות-תגלית\בעיות חקירה חייבות להיות מותאמות לרמת התלמידים בכיתה, מאחר ותגליות וחקירות יכולות להיעשות בדרגות שונות. יהיו תלמידים שירוצו מהר בחומר ויהיו שיעשו צעדים קטנים, ויזדקקו ליותר הנחיות. אני רוצה להטיל ספק בפתרון בעיות ככלי האולטימטיבי ללימוד מושגים מתמטיים דרך פתרון בעיות. אני חושבת שצריך להיות איזון בכיתה בין שני הסוגים של פתירת בעיות. זה עבור פט.

בוריס: תודה.

WHO SPEAKS NOW, PAT OR BORIS???מס' הערות קצרות. ראשית כל- דיוויד, ישנן התייחסויות ל"דיוויד אמר", ובאשר להתבטאויות הקשורות לאנשים אחרים, אל תתעצבן. יש לנו השקפות שונות, אולי מאחר שאנו מסתכלים על חלקים נפרדים של המציאות. יש לנו דוגמא נפלאה לאיך אתה יכול ללמד הבנת מתמטיקה דרך פתרון בעיות בקלות. אך הניסיון של כמה תרגילים קלים יש לך במערכת. הנה פרופ' באוני', הוא אינו מתעניין כיצד ללמד מורים של בי"ס יסודי כעונש ע"י המחלקות – אני מעניש לשנה אחת, ובפעם הבאה אחר יקבל את העונש הזה, אך הנה אדם מסור, הוא לקח את זה כמשימת חיים, וזה דבר אחד. פרוניצל NAMEמבדיל בין דבר ניתן ללמידה, גמיש, וניתן ללימוד. אם יש לך כיתה קטנה ואתה רשאי לעשות ככל העולה על רוחך, אז אתה יכול להראות כי זה ניתן ללמידה. ניתן ללימוד אומר כי במע' החינוך ישנם מספיק מורים המסוגלים לבצע זאת, כך ש"ניתן ללימוד" ו"ניתן ללמד" הם שני דברים שונים. עלינו להיות מעשיים, כפי שאני אומר, למרות שאנו מסתכלים על מציאויות נפרדות. אם תסתכל על המע' הכוללת, ותראה את המורים שבה, עליך להשתמש באנשים אלו כדי לקדם השכלה מתמטית. אני מתנגד מאוד לדירוג בני אנוש לפי תוצאות פסיכומטרי. עד כה ידועים לנו סוגי אינטיליגנציה אחרים, אינטיליגנציה רגשית, זה נרחב מאוד כפי שנלמד בארה"ב, אך לא בקהילתינו- מדוע? מאחר שזה לא ניתן למדידה, אין לנו מספרים. אם אתה מעל 600, אתה אדם מאוד אינטיליגנטי. אם אתה מתחת ל600, לך לרכוש את השכלתך בקולג'. אני חושב שעלינו להעריך אנשים שהסכימו לעבוד בתנאים הללו, וכן, אתה צודק- אם נעלה את המשכורות, ייתכן ויהיו לנו יותר מועמדים, אך אתה אינך יכול להעלות אותן, ואף אחד לא יכול לעשות זאת. אז אלו הם חיילינו, אנא עודד אותם, ותן להם לבצע משימות שהם מסוגלים לבצען. פט- רפלקסיביות היא דבר נפלא, אך שוב, היא אינה דבר כה קל לביצוע ולוקחת זמן. אם אתה צריך לעמוד בסילבוס, ולהכין תלמידים- אתה יודע- לבחינות הבגרות או מה שלא יהיה, אין להם זמן להתבוננות פנימית. אם אתה יודע כיצד לעשות זאת, אנא עשה זאת ואז תיפרד מהמתמטיקה כי אתה עומד ללמוד משהו אחר, הייטק או ביוטכנולוגיה, שלא להזכיר משפטים ורפואה ותחומים חשובים אחרים, בהם מתמטיקה אינה שמישה.

סליחה- שלמה וינר.

בוריס- אני מצטער, יש לי מינוס 5 דק', וזה מספיק בדיוק כדי לומר- תודה רבה לך טד, על היותך פותר בעיות נהדר וגם כותב בעיות נהדר, אם כבר מדברים. תודה לכם, הועד המארגן, תודה לנו, חברי הפאנל, ולקהל- תודה שנשארתם מ8 עד 5. נתראה מחר.

(מחיאות כפיים)