**הצדקות במתימטיקה ובחינוך המתמטי -- רב-שיח**

**בהשתתפות: קית' וובר (מנחה), גילה חנה, גרשון הראל, איבי קידרון, אנני סלדן**

היי, שמי קית' וובר ויש לי הכבוד להנחות את הפאנל על נימוקים במתמט' וחינוך מתמטי. אתחיל בלומר שאני סבור כי הוכחות הן נושא הולם לכנס זה, מאחר והוכחות, כמעט כמו כל נושא, שנויה במחלוקת בין מתמטיקאים ואנשי החינוך המתמטי. ב1990 בארה"ב ומקומות אחרים, היה קרע גדול בין הקהילות, כי מורים למתמט' בקושי הקדישו תשומת להוכחות, וכמעט הורידו נושא זה מתוכנית הלימוד. זה הכעיס מאוד את המתמטיקאים. כיום ניתן לראות הוכחות בכל מקום, וזה העלה עוד נושא בין מתמטיקאים ומחנכים למתמט'- כיצד יש להגדיר הוכחה? בהתבסס על עבודתם של אייזנברג ודרייפוס, בנוגע לנטייתם של התלמידים לדמיין את המתמט', דרייפוס הציע כי ההדמיה צריכה להחשב כהוכחה. אם חושבים על כך, הצעה זו הינה שנויה במחלוקת. היא מעלה מס' נושאים שמתמטיקאים ומחנכים למתמט' אינם מסכימים עליהם לעיתים. למשל- מתמטיקאים סבורים כי הוכחות תוך שימוש בהדמייה- הוכחות ללא מילים, האם הן באמת הוכחות עבור מתמטיקאים? האם ישנה הסכמה על נושא זה עם המתמטיקאים? האם טיעון עם הדמיה צריך לספק לתלמידים הוכחה מוחלטת? אם כך, מהי הוכחת הטיעון? ואם מתמטיקאים ומורים למתמט' אינם מסכימים על היבטים מסויימים בהוכחות, למי תינתן העדיפות בקביעת הוכחה מהי בכיתות הלימוד? אם המטרות וההגדרות של המתמטיקאים והמחנכים הן כ"כ שונות זו מזו, ולא ניתםן למתמטיקאים להתבטא, האם למחנכים תינתן הסמכות לקבוע זאת, האם לא נסתכן בהזרת המתמטיקאים? לא נגיע לכל הנושאים הללו, אך אני מקווה שדברי חברי הפאנל ישפכו אור על נושאים אלו. למזלי, ניתנה לי ההזדמנות להנחות פאנל מכובד זה, לכולם היתה השפעה אדירה על עבודתי ואני מעריך מאוד את מעשיהם, יוהנה, פרופ' למתמט' ולחינוך מתמטי מאוני' טורונטו, שחקרה את טבעה של הוכחה מתמטית. בין תרומותיה החשובות לתחום החינוך המתמטי- הוכחות ותוקפן, מחלוקות לגבי הוכחות בקהילה מתמטית. גרשה הררה הוא פרופ' למתמט' באוני' קליפורניה, סנט דיאגו. מחקרו כולל נימוקים יחסיים, מבנה של הוכחות, הוא עודו מעצב את התחום כיום. איבי קדרון היא פרופ' חברה במכללה לטכנולוגיה בירושלים, מחקרה מתמקד בתיאורית רשת, מתמט' ותהליך הניתוח במתמט', כיצד הליך הנימוק הוא הליך בונה ידע. אנני סלדון מתמטיקאית לשעבר שהפכה למחנכת למתמט', כיום היא פרופ' לחינוך מתמטי באוני' מקסיקו סטייט. עבודתה עם מתמטיקאים חוקרים בארה"ב לגבי מסגרת עבודה וביסוס הוכחות ותפדיקה של תיאוריות קוגניטיביות בעבודת ההוכחה. למרות שכולנו נציג נתונים מהמחקרים שלנו, ברצוני שחברי הפאנל יתייחסו לארבע השאלות הבאות: הראשונה מגיעה מהמארגנים, לגבי איזו הוכחה מספיקה, בקהילה המתמטית ובכיתות לימוד המתמט'. השניה מגיעה- כולנו מתעניינים בחינוך מתמטי, אך כל אחד מנק' המבט שלו- אז אם נסתכל על אופי טענותינו וכיצד לדעתינו טענות אלו יוצרות עיסוק מתמטי. כל פאנליסט יקבל 10-15 דק' להצגת טענותיו הראשונות ולאחר מכן נעבור לשאלות. כאשר הועד המארגן ביקש ממני לנהל פאנל זה, כתבתי להם בחזרה שאשתדל לנהל פאנל זה בהיגיון. טומי החזיר לי תשובה- הוא לא רצה שאעשה זאת בהיגיון, אלא בפרובוקטיביות. אם טומי רוצה מנחה פרובוקטיבי ולא הגיוני- זה מה שהוא יקבל (צחוק). אתחיל בלענות על השאלות שהצגתי- לדעתי עלינו להגדיר הוכחה כפי שמתמטיקאים מגדירים אותה, ועלינו להתייחס ליחסם להוכחות כשאלה פתוחה. דעתי באישית בעניין היא שזה תלוי במדיניות, משמעויות שונות בהקשרים שונים. הוכחה היא קטגוריה מעורפלת ולא דיכוטומית (שחור לבן). למרות שישנן דוג' לגבי מהי הוכחה ומה אינה הוכחה, ישנם דברים רבים באמצע. אני מנסה להבין את התהליך שמתמטיקאים משתמשים בו כאשר הם קוראים ויוצרים הוכחות, ואז להשתמש בזה כדי להבין מדוע הם משתמשים בתהליך זה, ואני מנסה להשתמש בראיונות פתוחים והיפותזות שונות לגבי עיסוקים מתמטיים, לאחר מכן בוטחן היפותזות אלו בקנה מידה גדול יותר, אני מאמין שכך נוכל ללמד את התלמידים שיטות יעילות מאוד שיסייעו בלימוד בכיתה. מקובל בקרב מחנכים למתמט' שמתמטיקאים עוסקים במבנה הוכחות. אתן 2 ציטטות לדוג'- "מטרת התפקוד מחדש הוא להגדיר לתלמידים כיצד המתמטיקאים מגדירים ומבצעים הוכחה בימינו". הגדרה זו של הוכחות בכיתה. סטייאנידיאה אומר שהוכחה משתמשת בסיבות תקפות, או לפחות כאלו שמתמטיקאים מתייחסים אליהן כאל תקפות. שימו לב שלא הגדירו כאן כיצד יש ללמד הוכחות, אך כן נאמר מהן המטרות בלימוד הוכחות בכיתה, וכן הגבלות לגבי מה לכלול בהוראה ומה לא. שימו לב שקיימת פה הנחה מפורשת שקיימת הסכמה בין מתמטיקאים לגבי היבטים מסויימים בהוכחות. באופן ספיציפי, המתמטיקאים השיגו הכרעה באופן זהה- היו להם אותם סוגי נימוקים שלדעתם היו תקפים. אני מוכן לטעון היום שאיני סבור שזה נכון. אבהיר כי איני מנסה לטעון טיעון שלא ניתן לסתור, שכביכול ישנה 100% הסכמה בין מתמטיקאים על כל נושא, אנו מודעים לכך שישנם נושאים שנויים במחלוקת בקהילה המתמטית- שימוש במחשבים, הוכחות מסויימות, הגדרות נרחבות מידי, התלויות בתת-דיסיפלינות, טיעון אפשרי אחד הוא שאין זה משחק תפקיד בחינוך מתמטי, זה מעניין יותר מתמטיקאים מאשר פילוסופים. אני מוכן לטעון כי אי-הסכמות מסוג זה קיימות אפילו ברמות החישוביות. אתמקד בתיקוף- כיצד מתמטיקאים יקבלו הוכחה תקפה בחישוב? כיצד ניתן להשיג הכרעה תקפה? יצאתי מכלל הנחה שמתמטיקאים די סגורים לגבי מה נחשב בעיניהם להוכחה. הגעתי לכדי הטלת ספק בגלל דבר מה שכתב סלדון, שבחן האם הכוחות של כיתה ד' תואמות לתיאוריית ההוכחה התקפה. כאשר ערכתי מחקר בלתי תלוי עם עמיתי, וערכתי מבחן זה למתמטיקאים, הופתענו לראות שהיו מס' מחלוקות. במחקרו של ארטיו, ההוכחה שסלדון חשב שהיא תקפה לחלוטין- הם כינו אותה "העניין האמיתי", נחשבה לתקפה רק ע"י 14 מתוך המתמטיקאים שריאיינו. עוד הוכחה שסברנו כי היא אינה תקפה- נקרא לה "הפער", נשפטה כלא תקפה רק ע"י 12 מתמטיקאים שריאיינו. זה לא מאושש את תוצאות מחקרו של סלדון, הוא חיפש תהליכים ותוצאות, אך זה מעלה את השאלה, אם 2 חוקרים מתמטיקאים שהעלו את השאלה מה תקף ומה לא, וחקרו זאת לעומק, לא השיגו רמת הסכמה משותפת גבוהה. אולי רמה כזו אינה מתקיימת לעיתים קרובות. ע"מ לבחון היפותזה זו, עמיתי ואני נתנו הוכחות לאינטגרל של 1מעל X , לפי הלוגריתם הטבעי של X ל108 מתמטיקאים. אמרנו להם שהוכחה זו הוגשה למגזין מקצועי, ה"גאזט" למתמטיקה, לצורך הבהרה. ההוכחה טענה שאם K יתקרב למינוס 1, הגבול של האינטגרל xdkdx ישווה ללוגריתם הטבעי של X. במילים אחרות- ההוכחה קישרה בין הגבול לסימן האינטגרל, ואין זה תקף, באופן כללי. כאשר נתנו הוכחה זו למתמטיקאים, 72% אמרו כי היא תקפה והיתר אמרו שהיא לא. אולי תאמרו לי- רק רגע קית'. אם תיתן הוכחה זו לחמשת חברי הפאנל, ייתכן שכל אחד יגיד לך דבר שונה. עמיתי ואני ניסינו להתמקד על אחת הבעיות בהוכחה שנתנו, בגבול האינטגרל. לאחר שהחליטו לגבי התקפות, אמרנו להם שמתמטיקאי אחר אמר שההוכחה אינה תקפה בגלל שאין קישור בהכרח בין הגבול לאינטגרל. שאלנו אותם האם הם סבורים שטענתו היתה הגיונית. רובם סבר שכן. ואז שאלנו- אם סעיף זה לבדו יכול לפסול את תקפות ההוכחה? בין אלו שאמרו שההוכחה היתה תקפה, 65% מהם אמרו שהוא אכן מספיק. בין אלו שאמרו שהטענה אינה תקפה, רק אחד אמר שהסעיף מספיק. אם כך, המתמטיקאים לא היו מאוחדים בדעותיהם לגבי תקפות הוכחה זו, וגם לא לגבי סעיף פוסל אחד. אם כך, ניתן לומר שאפילו ברמת החישוב הפשוט אין הסכמה רווחת בינם. באשר לעדויות אמפיריות בהכרעה, רוב המחנכים המתמטיים סוברים שמתמטיקאים אינם צריכים ויכולים לגזור הכרעה מעדויות אמפיריות(ניסיוניות). עם זאת, אם תבדוק את כתביהם של מתמטיקאים ופילוסופים מסויימים, אין זה ברור כ"כ. ניתן לראות שם כי ניתן להכריע בהחלטות מסויימות ע"ב עדויות אמפיריות. מחנך למתמט', קאליוור, מביע דיעה נחרצת יותר- מתמטיקאים משוכנעים לעיתים קרובות באמיתות תוצאותיהם, בד"כ ע"ב עדויות אמפיריות, זמן רב לפני שיש להם הוכחות. הוא מבחין בקפידה בין הכרעה ויצירת היפותזה. הוא טוען שישנה הכרעה. אינני טוען שהם צודקים, ושיש למתמטיקאים לעיתים קרובות עדויות אמפיריות כטענות, אך לאור דברים אלו, אל לנו להתייחס לכך כמובן מאליו, שעדות אמפירית אינה משכנעת. הגעתי לנושא זה כאשר כתבתי מאמר על פיתוח הוכחות ע"י מתמטיקאים, אחד הממצאים שהפתיע אותי היה בהקשר של תיקוף הוכחה. כאשר מתמטיקאי הגיע להצהרה, לעיתים הוא בדק ע"י מס' דוג', ולאחר שראה כי היא עובדת, הוא המשיך לפתח את עבודתו. ניתן לראות זאת ב2 הדוג' הנ"ל. כדי לבדוק את כלליות הטענות, הרצנו סקר בין 108 מתמטיקאים פעילים. לא אקרא את כל התוצאה שלנו, אך לעיתים מתמטיקאים בוחנים טענות בעייתיות ללא הוכחה תקפה. הם בוחנים אותה אמפירית עד שהם מגיעים למסקנה שהיא מספיק תקפה לצורך ההוכחה. כאשר קוראים עיתון, 50% יסכימו, 9% לא יסכימו- את נחליף את המבחן לדף התייחסות, שברור כי הוא כולל תקפות, 42% יסכימו, 27% לא יסכימו. ושוב לא קיבלנו רמת הסכמה גבוהה. זה היה בהקשר של קריאת הוכחה. בסקר אחר, לגבי סברות פתוחות, שאלתי 87 מתמטיקאים פעילים, האם הם משוכנעים לעיתים שהוכחה היא נכונה, ללא הוכחה. 26 ענו בהן, 71 לא. ושוב ישנה השאלה האם המתמטיקאים מאוחדים בדעותיהם לגבי עדויות אמפיריות. אעבור ברפרוף על המצגות לגבי סמכות, כי זה בערך אותו הדבר כמו עדויות. שאלתי 9 מתמטיקאים האם ומדוע הם קראו תקציר שהתפרסם לעמיתיהם. הציטוט הראשון, הוא של מתמטיקאית שאמרה שהיא תקרא אותו אך לא תשתמש בו עד אשר בדקה את ההוכחות. המתמטיקאי השני אמר בדיוק ההיפך, אם זה מפורסם בעיתון, הוא מאמין שזה נכון. שוב, ניסינו לבדוק את כלליות הסקר הזה, הרצנו אותו בקרב 80 מתמטיקאים, ואותו הסקר, כמובן- ניתן לראות שכאשר מדובר בקריאת הוכחה בעיתון, דע המתמטיקאי השני היא הרווחת יותר- הם נטו לראות את המאמר שהתפרסם בעיתון כנכון, כמו כן הם נטו לראות הוכחות שנכתבו ע"י סמכות כנכונות. כאשר מדובר בהתייחסות להוכחה, שזה לחלוטין נותן תוקף להוכחה- לא כמו קריאת הוכחה, בה המטרה העיקרית אינה דוקא לאמת את ההוכחה. לגבי ההוכחה של מקור סמכות, יש לנו 38% הסכמה, 40% אי הסכמה, ושוב עולה השאלה, האם מתמטיקאים מסכימים שראיות ממקור סמכות הן משכנעות או לא? אוסיף כי מחקר שנערך לאחרונה בפילוסופיה מתמטית משלב ממצאים אלו. לסיכום, אם אתם מאמינים שטיעוני הם נכונים, ומתמטיקאים אינם אחידים בהסכמה זו, אני חושב שיש לכך 3 השלכות: ראשית, כמחנכים למתמט', אני סבור כי עלינו להיזהר בגזיירת מסקנות ממס' בודדים של מתמטיקאים. אפילו לא כאלו שאנו מכבדים מאוד. מחנכים רבים מאמצים את דעותיו של מתמטיקאי שהם מסכימים עימו, וגם אני חוטא בכך, ומציגים דעות אלו כמייצגים את הקהילה המתמאטית. למעשה, התגובה של תורנסטון לכך, היא שאל לנו לזלזל ברעיונותיו, שכן אם רעיונות אלו תקפים עבור מתמטיקאי אחד, עלינו להתייחס להכללת רעיונות אלו כשאלת מחקר פתוחה. ויותר בצניעות- עלינו לבחון גם את אופי שימושינו במתמט', גם אם אנו מתמטיקאים, ואני לא אחד כזה. באופן כללי, ערכתי את מחקרי מזוית תורשת האדם, כלומר חיפשתי אחר דפוס בהתנהגות המתמטיקאים החוקרים, והחשבתי את השונות כגורם חיצוני. לאחרונה הגשתי מחקר לעיתון "אלן אנד ארטיס", העורכת החזירה לי תשובה- איני יודעת מדוע אתה מפקפק בשונות. עליך לחגוג את העובדה שהיא קיימת. במילים אחרות, מה שעשיתי היה לתור אחר הומוגניות אצל מתמטיקאים, בהנחה שהיא קיימת, במקום להתייחס אליה כשאלת מחקר פתוחה. נדמה כאילו אם נבקש להגדיר מבנה, בהתבסס על טענותיהם של מתמטיקאים לגבי מה מותר או אסור לעשות, הוא ישתנה תחת הנסיבות- מתמטיקאים עושים כל מיני דברים, ייתכן שנמצא את X יותר מרוקן מתוכן, ומה עם התייחסויות שונות אליו? זה תלוי מתי הם מוצאים בו תועלת ומתי פחות. ובמקרה של סמכות- הסמכות עשויה להיות יעילה במקרה שהמתמטיקאים מבקשים להכריע הוכחה, אך לא למטרת הפקת תובנות מההוכחה. סאל ציינה כי הוכחה המבוססת על מקור סמכות יכולה להוות טיעון, עם זאת- ידע המבוסס על תכתיב של סמכות אינו יכול להחליף הבנה אמיתית.

גילה חנה, אוני' טורונטו: ראשית, ברצוני להודות למארגנים על הכנס הנהדר שהם הרימו פה. טד, יש עוד הרבה דברים לעשות לאחר הפרישה, אני מבטיחה- זה מהניסיון שלי. טד ואני הכרנו בTME, בקב' לחשיבה מתמטית מתקדמת, שהונחתה ע:י דייויד. 3 מאיתנו בפאנל- אנני, גרשון ואני ועוד מס' אנשים שנמצאים כאן היו בקב' עד שהיא הפסיקה לפעול. מיצינו כבר את כל הנושאים בדיונינו בקב'. פירשתי את ההזמנה להשתתף בפאנל כבקשה להכיר את הרקע שלי, אז לא אדווח על מחקר ספיציפי, אלא רק אציין מה עשיתי עד כה ומה בכוונתי לעשות, בקווים כלליים. כפי שאתם ודאי יודעים, אני מתמקדת בנושאים אפיסטימולגיים בהקשר להוכחות בחינוך המתמטי. מוקד מחקרי אינו קוגניציה- אני משתמשת במונחים שדיוויד השתמש בהם לפני שעה, אך במובן אחר. תיאלצו להתרגל למינוח שלי. במחקרי אני מנסה למקד את תשומת הלב של חוקרי חינוך להתפתחויות האחרונות בפילוסופיה ובפרקטיקה המתמטיות ולרלוונטיות של זה לחינוך המתמטי. ועוד אזהרה אחת- איני חלק מקב' הפילוסופים של חינוך מתמטי. אני בין הפילוסופיה של המתמט' והחינוך המתמטי. מדוע פילוסופיה של מתמט'? מאחר וב30 השנים האחרונות, פילוסופים של מתמט' שינו את מוקד מחקרם הרחק מהיסודות הלוגיים של המתמט', שלא היו רלוונטיים לחינוך מתמטי. ובאשר למחקר מעמיק של פרקטיקה מתמטית- מוקד העניין החדש הוא רלונטי מאוד לחינוך המתמטי, בגלל היישומים החדשים למתמט', תפקידה של הטכנולוגיה החדשה, אופי קבלת ושפיטת ההוכחות, שיטות נימוק שונות (למרות שאיני עוסקת בקוגניציה) ובדרך בה מציגים ראיות. ברצוני לומר- אם יש פה אנשים שמממנים פרויקטים- קנדה היא ספונסרית גדולה של פרויקטים, מחקריים אך לא אמפיריים. קנדה מממנת מחקרים על תיאוריות או יסודות. כמו עוד מעמיתי אני מרויחה מגישה זו. אני ממליצה גם לישראל לעשות זאת- בקנדה ובעולם, מחקר תיאורטי מביא ליישומים מעשיים, יותר ממחקר אמפירי. אנו שמחים מאוד להפיק תועלת מגישה זו בקנדה. לימוד מהפילוסופיה של המתמט', פרקטיקה מתמטית, רעיונות ופיתוחים חדשים, מה המתמטיקאים עושים? החלק החשוב הוא ההבנה של ההיוריסטיקה (שיטות פתרון שאינן ע"י אלגוריתם), סגנון הנימוק, יצירת מושגים, אנלוגיות, דיאגרמות, פתרון, הסבר וצידוק. לקחתי מכל זה בעיקר את חלק הצידוק. כאשר אנו בוחנים פרקטיקה מתמטית, עלינו להכיר כיצד היא מתנהלת (דיברנו על כך), לא תמיד היא תתמקד על פורמליות, אקסיומות והוכחות- אך חלק נימוק ההוכחה (וישנו הבדל בין הוכחה לפורמליות), ישנם סטנדרטים לנכונות שאינם הוחכות פורמליות, ישנם גם יסודות, אך לא אעסוק בזה. אם כך, במתמט' ישנה מודעות, שינויים, תפיסה, אמינות, הקפדה, ישנה אינטראקיצה והשפעה רבה של מדעי המחשב, פיזיקה ומדעים מדויקים אחרים, וישנן תגליות חדשות ופיתוחים בכל פתרון בעיות. אז זוהי ההוכחה הסטנדרטית להוכחה, אין צורך לקרוא אותה, כולנו יודעים אותה בע"פ, וזו הוכחה שלפי ההגדרה שלי היא פורמלית. אני משתמשת במונח "הקפדה" באופן שונה מדיוויד- איני משתמשת בה עבור הוכחות פורמליות- הן פרומליות, נקודה. אני משתמשת בהקפדה כדי לבחון הוכחות קונספטואליות, לעיתים הן מכונות הוכחות בלתי פורמליות, לעיתים הן מכונות הוכחות נורמליות שמתמטיקאים נורמליים מוצאים. ההיקש הלוגי הרגיל שלנו בד"כ מושמט, המטרה היא להביא מתמטיקאים ידועים לביסוס מחדש של תיאוריות. במתמט' הפרקטית, אין לנו מנוס מדו-משמעות. עם זאת, מתמט' היא מאוד מדוייקת- למרות החלק הקטן שאינו מדוייק במקצת. אם אבחן את הדברים ששייכתי לפרקטיקה המתמטית, כדי להפיק הוכחה ברמה האישית , הפקת הוכחות מתקבלות היא קשה מאוד. ישנו המימד החברתי- ההוכחה זקוקה לאישורם של אחרים, ואם היא פורסמה, הרי היא נתפסת כאמינה וניתן להשתמש בה עבור הוכחות אחרות- למרות שרצוי לבדוק את אמינות ההוכחה המפורסמת. מבחינה אפיסטמולוגית, עלינו לשמר את הסטנדרטים הנוכחיים של ההקפדה- הסטנדרטים הנוכחיים אינם קבועים לאורך זמן . אם כך, עלינו לשאוף להוכחה המתמטית האידיאלית, היא ההוכחה הפרמלית. לרוב איננו (המתמטיקאים) עושים זאת. מהות המתמט' דורשת סטנדרטים גבוהים להוכחה- מידת ישימותם תלוייה במצב. אם כך, יש לנו הערכה נורמטיבית להוכחה, ישנה סובלנות רבה לטעויות, זה קרוי בספרות "טעויות הניתנות לתיקון". ישנו שיווי משקל בין קפדנות לאינטואיציה, הרעיון שאני מנסה לקדם כיום הוא שהוכחות יכולות להיות מבוססות על ידע מתמטי, ומה שאני לוקחת מהפילוסופיה של המתמט'- אני לוקחת יישומים בתחום החינוך המתמטי. אחד מהם הוא "הניצוץ"- כאשר יש לנו כלי מתמטי- לעיתים המצאת שיטה חדשה עבור ההוכחה. יש לנו את השיטה המאלצת, לפי כהן, השיטה הבטוחה- שיטות רבות שנוצרו למטרת הוכחה. שיטות אלו יכולות לשמש לפיתרון בעיות בשלב מאוחר יותר. מאחר ואני מאמינה בנושא הכנס הזה- הכנסת תחומים רבים של מתמט' לתוכנית הלימוד, ביניהם הוכחות, כמובן, כתבתי על כך, שישנה סיבה נוספת לכך שהוכחות צריכות להיות בתוכנית הלימוד- הן יכולות לעזור בלימוד המתמט' עצמה. הן יכולות לצייד את התלמידים בשיטה נוספת. דיברתי על מעלותיהן של ההוכחות, אלגנטיות, הסברים, וכו'. כל המעלות הללו הן רלוונטיות לחינוך מתמטי- מיניתי כמה תלמידי דוקטורט לעבוד על כך. ישנן הוכחות בעלות אופי הסברתי, וזה יעיל במיוחד בחינוך, כולנו יודעים שישנן הוכחות שאינן מהוות הסבר, ושישנם הסברים שאינם מהווים הוכחות, וכי ישנן הוכחות שהם גם הוכחות וגם מהוות הסבר. הרכיב המסביר הוא חשוב מאוד, אני מרגישה כי אין זה נכון עבורי לומר שזה בגלל הקוגניציה, אין לי זכות דיבור בנושא זה כי איני מבינה בו, אם תמצא מונח אחר שמגדיר הבנה, שיהיה. אך יש לקחת בחשבון שאם דבר מה יכול להסביר, אין זה אומר שהוא נכון פורמלית. ישנם הבדלים דקים כאשר מדברים על הוכחות, ויש לבחור את המינוח בקפידה. טימותי גאוורס מדבר על הוכחה- יפה, טבעית, מסבירה, כללית... הוא זה שפנה לפילוסופים וביקש מהם לנסות להגדיר יותר הוכחה מהי. דרך אגב, אחד הדברים שאני עושה במחקרי הוא לקרוא את הבלוג של גאוורס וטאוורס, יש כ"כ הרבה אנשים שקוראים את הבלוג, עד שגוגל מפרסמים בו מודעות פרסומת לגאפ, בננה רפבליק, ועוד. טאוורס טוען שהקפדנות אינה צריכה לפגוע באינטואיציה, אלא יש להשתמש בה כדי לפגוע במה שהוא מכנה "אינטואיציה מוטעית". בבלוג הוא מסביר כיצד לעבור מקפדנות לפורמליות, לאינטואיציה טובה וכו'. זה יעיל מאוד. ערכה של ההוכחה בלימוד, בהסברים, בשיטות, יישום הרעיונות המרכזיים של ההוכחה בהקשרים אחרים, מאפיינים רלוונטים- כל אלו מופיעים בבלוג. הוכחה מחייבת שיטה, עבדנו על זה לאחרונה- אנו מנסים למצוא תיאוריות הכוללות שיטות שכדאי ללמדן ולכלול אותן בתוכנית הלימוד בתיכונים, כדי ללמוד על כוחם של כלים של מתמטיקאים אחרים. יש לנו פה כמה דוג'- מע' טלסקופית, רפריימינג- לעיתים אנו עושים זאת עם ילדים באירועי שיא, למשל הנוסחה למשוואה ריבועית, בה כאשר מוכיחים את הנוסחה יש להשלים את הריבוע, כך שאתה לומד שניתן ליישם את שיטת ההשלמה לריבוע במקומות אחרים. דיברנו על מעלות ההוכחות המתמטיות ועל עבודתם של מתמטיקאים. כעת אפנה בזוית של 180 מעלות ואדבר על הוכחות פורמליות. לפי מה שאני יודעת, מתמטיקאים רבים אינם יודעים שהדברים אירעו ברצף הבא. רבים מהם אפילו יתווכחו עם נחיצותו של רצף זה. המאה ה21 היא המאה של ההוכחות והמתמט' הפורמליות. זה, לפחות, מה שקראתי בספרות. בקהילה המתמטית בארה"ב היה דיון רחב לגבי מתמט' פורמלית. "האם זו אבולוציה?" זוהי הכותרת של מהדורת דצמבר של- לא כתבתי את התאריך, נכון, בעתיד רוב המתמטיקאים לא יתייחסו למתמט' כאל מקיפה, אלא אם היא פורמלית לחלוטין. במהלך 20 השנה האחרונות חלה התקדמות בהוכחות עזר וציוד עזר. יש לנו מחשבים וטכנולוגיה חכמה שיכולה לבחון כל הוכחה מתמטית בקפדנות רבה יותר מכל בן אנוש, והוכחות נוכחיות כיום עדיין רחוקות ... (תקלה במחשבף עברה הלאה). כל אחד מכם שרוצה הוכחה על שמו, יכול לקנות אחת ב15 פאונד מאוני' אדינבורו. ישנה הכתבה "התיאוריה מאחורי התיאוריה שלי" של הקב' הזו מאדינבורו, האינטרנט לא עובד... תאמינו לי, נסו לפתוח בעצמכם את הכתובת האלקטרונית אח"כ. הנה- "גלו תיאוריה על שמכם", אני באה מטורונטו, בה לא תקבלו מדליה על תיאוריות כאלו. אך תקבלו את שמכם עליהן. אתם יכולים לבחור גם באילו אקסיומות להשתמש וכו'. פורמליות זו חשובה לבניית נוסחאות מתמטיות פורמליות, אך היא גם חשובה בחינוך המתמטי, כמו בגיאומטריה. לא אפתח זאת כי יש יותר מידי טקסט. כרגע יש לנו תיאוריה המוכחת ע"י תבנית מסויימת, המשמשת להוראה. היא נקראת EDUTPS והיא גם עובדת. אני מבינה רק מעט יותר מכם, מאחר ועדיין לא עבדתי עם כלי זה. עם זאת, מאחר והיא קיימת, לדעתי מורים למתמט' צריכים להכיר אותה, לדעת מתי היא רלוונטית לחינוך המתמטי וכיצד נוכל להשתמש בה. או-אז יתקיים אותו דיון כמו שהיה בגיאומטריה הדינאמית, כאשר חלק מהאנשים טענו שאין להשתמש בתוכנה לצורך הלימוד, כעת אנו נמצאים באותו מצב, רק בנושא הוכחת תיאוריות. אז הגעתי ממקום בו חקרתי מהי הוכחה פורמלית ומה מתמטיקאים עושים, וכעת זהו הנושא המדובר בין פילוסופים של פרקטיקה מתמטית, את השמות של חלקם אולי תכירו, ישנן תוכנות מאוד מוכרות- איזבל, קוקין פרנץ', ישנן כ12 תוכנות, תיאוריות מתמטיות רבות שהוכחו מחדש במע' זו. אנשי חינוך טוענים שהמע' עוזרת לתלמידים לעשות חלק מההוכחות לפורמליות, הם עבדו עם סטודנטים לתואר ראשון, והם טענו שהמע' עוזרת לתלמידים להבין היכן טעו בלוגיקה. זהו המשך כיוון המחקר שלי. זהו. תודה רבה.

גרשון הראל: למדתי באוני' הזו, זהו רגע מאוד מרגש עבורי. ברצוני להתנצל מראש על הקיצור ועל המהירות בהן אומר את הערותי. ברצוני לעגן אותן בנושא הפרוייקט הזה, מציאת בסיס משותף. אני סבור כי אחד האתגרים הגדולים בקהילה המתמטית בהם נכשלנו עד כה, הוא לעשות בעיות בלימוד במתמטיקה של הקולג'. ללא בעיות אלו, הקהילה המתמטית לא תתקיים. לא אדבר כאן על מאמרים שיסבירו בקלות במה עוסק החינוך המתמטי, והיכן הבעיות בו, כי עלינו להגיע לעיקר. מניסיוני ב3 המחלקות למתמט' בהן עבדתי, למתמטיקאים אכפת מאיכות ההוראה שלהם. הבעיה היא שהם לא רואים בזה בעייתיות. אותו הדבר לגבי למידת מתמט'. אז ישנן הרבה סיבות, אמנה אחת מכל סוג.מדוע זה קשה לאפיין בעיות בלמידה? פיאז'ה הגדיר זאת בצורה טובה ביותר שמצאתי- באותה תדירות בה מתפתחת הפסיכו גנטיקה, האופרציה המנטלית מתפתחת במקביל, עד שמגיעים לשיווי המשקל הסופי. עם זאת, יצירת האופרציה היא מורכבת הרבה יותר. עבור מתמטיקאים אחרים, עבורינו, מושגים במתמט', קצב השינוי, הטנזור של השינוי, מרחבים וקטוריים וכו', אינם בעייתיים. כדי להתבונן בתהליך זה, כפי שבנינו אותו, נדרש מאמץ רב. במובן של ההוראה, אני חושב שתפסנו רעיון זה במלוא עוצמתו, מדוע קשה למצוא בעיות בלימוד? בכלליות, מאחר והדרך בה הטכנולוגיה בנויה דומה לדרך בה המידע מאורגן. מה שאנו עושים הוא ללמד את אופן הארגון של המידע במקום את המבנה. ברצוני לתת דוג' לבעייתיות בלמידה והוראה, בהקשר להוכחות. הכותרת היא "הוכחות, נימוקים ואפיסטמולוגיה". אגש ללב העניין, ואלו הן תצפיות שתוקפו מחדש במס' מאורעות ע"י חוקרים רבים. הראשונה היא שתלמידים מוכיחים בעיות במתמט' ע"י דוגמאות. זוהי עובדה. עניין נוסף הוא שלעיתים קרובות- ואשים זאת במרכאות- "הוכחות של תלמידים" מורכבות בד"כ מדוג' אחת או שתיים. אם נשאל אותם מדוע הם בחרו מעט דוג', הם יענו שהם בחרו דוג' אלו באופן אקראי, לכן זה חייב להיות נכון. הודאות שחשים התלמידים אינה ניתנת כמעט לשינוי לאחר שראו תבנית חוזרת. חלק מכם יגידו שאין זה מכובד לומר "הוכחה" ו"דוג'" באותו משפט, וזה נעשה באופן תפיסתי- הוכחה ופיתוח דוג' הן פעולות הסקה. הן דרכים להשגת ודאות טובה יותר מהקיימת. ההגדרה הסובייקטיבית להוכחה היא הכרחית לחינוך. זוהי כמעט תיאוריה בחינוך המתמטי, שכדי ללמד את התלמיד דברים חדשים עלינו לנסות ללכת עם עולם המושגים שלו, אותו הוא בנה ע"י דוג', ולהמשיך משם. זה מה שאנו עושים כעת. כפי שקית' אמר לי, תפקיד החינוך הוא לפקח על תפיסת התלמיד את ההוכחה, לפי המוסכם על המתמטיקאים כיום. ב"כיום" איני מתכוון ליום זה ספיציפית, אלא לאמת שתהיה נכונה גם היום וגם לנצח. זאת מאחר ומתמט', כמו יצור חי, משתנה כל הזמן. עוד מס' ממצאים מהמחקר שלי ומחקרים אחרים: תלמידים שנתקלו בדוג' יוצאת דופן אינם מעידים בהכרח על תפיסת המושג כך. ישנו בלבול בין הוכחה למעשה והוכחה ע"י התשה. קיים בלבול בין קבילות ההוכחה ע"י דוג' ואי הקבילות של הוכחה ע"י דוג'. אלו הן מספיק ממצאים עבור מה שברצוני לומר. לעיתים קרובות אנו פועלים לפי השכל הישר וכדי לומר לתלמידים שהוכחות ע"י דוג' אינן הוכחות, אנו מדברים בסקפטיות וטוענים שהוכחתם חורגת מגבולות הבעיה שניתנה להם. לעיתים ישנם מצבים פתלוגיים כמו זה- הדיעה לגבי מספר ארוך מאוד אינה נכונה עבור המס' העוקב. לעיתים התלמיד אינו מצליח להבחין בכך. זוהי פעולה של היגיון בריא שמורים מבצעים- כולנו עושים זאת. יום לאחר מכן התלמידים עדיין מנסים לשכנע את עצמם ולהוכיח בדרכם הרגילה, לפי דוג'. הם מנסים גם לסחוף אחרים להאמין להם. מדוע זאת? התלמידים אינם טיפשים, הם מקשיבים לנו. אם חושבים על זה- וזה דבר חשוב מאוד לתקשורת בינינו, כמתמטיקאים. לתלמידים אכפת מזה אך אין להם ניסיון. הסיבה, אם חושבים עליה, אינה כה מורכבת. זכרו שהתלמידים נתקלו כבר בדוג' וביוצאים מן הכלל. הם עשויים לקבל הוכחה ע"י דוג' נגדית, אם היא תהיה משכנעת מספיק. אנו משתמשים בשיטה שאינה מקובלת מלכתחילה. אנו נותנים להם דוג' נגדית ע"מ שיימנעו משימוש בדוג' בעצמם. אין זה מפתיע שהמשוגע שלנו (הפתולוגי) משתכנע. כעת נשארנו עם בעיה קשה למדי, והיא השניה שברצוני לדבר עליה, כיצד נימוק דדוקטיבי יכול להיות נגיש אינטלקטואלית לתלמידים? אילו דברים עלינו לעשות בכיתה כדי להעביר תלמידים מהכרעה, שהיא אמפירית יחסית לנימוק דדוקטיבי. מצאנו 2 דברים יעילים מאוד. הראשון, להפסיק לדבר על הכרעות, ולהעביר את תשומת הלב לנימוקים. מעבר מלהוכיח ללנמק. השני הוא נימוק אפיסטימולוגי. אתן לכם הגדרה קצרה של מה שאני מדבר עליו- ההגדרה נושאת עימה נימוק אפיסטימולוגי. נתון KB כמידע, על יחיד או קהילה. מתקיים המצב הבעייתי S וK מתעורר. זוהי עמדה פילוסופית חשובה הטוענת כי בני האדם יודעים כל פיסת מידע, שנבנתה כמענה לצורך פתירת בעיה. ישנם מצבים בעייתים S שתלמידים מבינים כSUCH, קודם למבנה K נתייחס לכך כצורך אינטלקטואלי. לצורך אינטלקטואלי אין קשר למוטיבציה פסיכולוגית, תשוקה ועוד. יש לו תפקיד בתיווך בין ידע של תלמידים והדיסיפלינה. ובאשר לצורך להשיג שיווי משקל, ע"י למידת פיסות מידע חדשות. אם הפרט רואה כיצד K מתבטא בS, אז נאמר כי ליחיד ישנם נימוקים אפיסטימולוגיים. ניתן להביא אדם לצורך האינטלקטואלי, אך הוא עשוי שלא ללמוד דבר. אם הם לומדים כיצד הצורך האינטלקטואלי נפתר, נקרא לכך נימוק אפיס'. אם כך, צורך אינטלקטואלי ונימוק אפיס' אינם זהים, אך הם 2 צדדים לאותו מטבע. אתן לכן דוג' באשר לכיצד לעבור מודאות לסיבתיות. דרך אגב, יש לגם השפעה רבה על מסגרת העבודה, יש פה את עקרון ההכרחיות. קל מאוד לקרוא זאת. נטען, וזהו עיקרון מבני, שתלמידים שמעולם לא למדו מתמט' ואנו עומדים ללמדם, חייב להיות להם צורך לכך. ב"צורך" אני מתכוון קודם לצורך אינטלקטואלי, ולא צורך סוציו אקונומי. איני מתייחס לערכם של ערכים חברתיים והישרדותיים כאן (מזון וכו'), שאין לומדים מתמט' כדי להפוך לעשירים, אין זה נכון. אני עובד הרבה על מתמט' ומוכן לנסוע בשליחות לאפריקה , איני מתעלם מהערך בכך, התכוונתי לומר שהמורה צריך לענות ולגרות מחדש בכל פעם את צרכיו האינטל' של התלמיד. נגרה אותם עד ליתוח צורך אינטלקטואלי, בו הצורך לדע יידחף למימוש. N הוא חלק מהבסיס, אולי קראת על כך- ניתן למצוא מידע כזה באתר האינטרנט. ניתן למנות 5 צרכים אינטלקטואליים מתמטיים באדם: הם מהווים כוח מניעים לעיסוק המתמטי, לעבר לכל גורם אחר. אדבר רק על ודאות תחתונה, וסיבתיות, אתן לכם דוג' קצרה: הנה סוג הבעיות האחרוות ממין זה. האם ישנו מס' הגדול מכל מס' ברצף? תלמידים, מורים ופסיכולוגים חינוכיים – תלמדו כי מרבית התלמידים מפיקים הכרעה זו. הם בודקים במחשבוניהם ומוצאים מס' דוג'. שואלים אותם כיצד הם יודעים שהאיבר הבא אף הוא יהיה קטן מ2, הם יודעים שאתם יודעים שהוא יהיה קטן יותר. אין בכך כל טעם. אם תחכה זמן מה, תמצא תשובות נוספות. יש שיאמרו- ובכן, שורש מ2 הוא פחות מ2, אם נחבר שורש מ2 ל2, נקבל פחות מ4, ושורש מכך יהיה קטן אף הוא 4, וכן הלאה. התלמידים בונים את הקוים הדימיוניים של הרצף וגוזרים לפיהם את כללי הרצף. בשלב הבא, הם ילמדו שקיימין רבים הקטנים מ2, ושניתן אף להקטין אותם. העניין הוא שכאשר דברים כאלו חוזרים ונשנים, הלומדים חושבים כי לא רק שהם משוכנעים, החזרה על כך נותנת הכרה כה גדולה עד שהם רוצים להמצא בסיטואציה של מסווה. הדבר השני הוא נימוק אפיסטימולוגי. כפי שהתברר, ניתן להתמקד בהוכחות ולהדגיש סיבתיות. כל מושג חייב להיות מנומק, לא רק הוכחה. כל מושג שעולה על הדעת חייב שתהיה לו סיבה. המושגים נרמזים במפורש מסיטואציה בעייתית, לפי דעת התלמיד. אתן דוג' לכיצד זה נעשה באלגברה, למשל: יש פה לעיתים הבדלים. אנשים שומעים לעיתים שישנם הבדלים הכרחיים בין הגדרות שונות, וחושבים כי הם יוכיחו מושגים שונים בצורה שונה. הבעיה כאן היא שאין בנמצא מסגרת עבודה קוהרנטית להופעת הנושא עצמו. ישנו הבדל בין צורך גלובלי לצורך מקומי, כמו אלגברה למשל- המורים מלמדים לפי אוריינטציה לתחום ולהקשר, היא נגזרת מבעיות בסיסיות. בעיות אלו מנוסחות בדרך בה התלמידים יבינו ויעריכו אותן. במלהך כל הקורס, כל פעולה שנבצע בכיתה היא קידום חקירת קורסים כאלו. אתן לך דוג'. בהנתן מע' משוואות דיפרנציאליות, כיצד נפתור אותה? נדרשת דרך חישוב מיוחדת. אין בנמצא אלגוריתם לפתרון. כיצד נחליט מתי למע' נתנוה יש פתרון? ואם יש לה, כמה פתרונות יש לה? אם יש לה אינסוף פתק', כיצד נארגנם? אתם יכולים לראות את הרעיון מאחורי עבודה באלגברה. דוג' קצרה, למרבה הצער אין לנו הרבה זמן לדבר על הבסיס האפיסטימולוגי לגישה, שהתחיל אצל אריסטוטל, קודם ע"י גרטסמן במובן מסויים, ולבסוף רעיון זה נזנח. אראה לכן דוג' לצורך תפיסה דיאגנוסטית: בלא שנאמר דבר על ערכי אידיום, נתחיל במע' משוואות דיפרנציאליות עם תנאים התחלתיים, התלמידים מובלים לדיון שמפרש את המע' בדרך המוכרת להם. ממתמט' ניתן לראות כי הפתרון שווה לC=D=..., שווה ל80, ויוצע כי הפתרון יוצג בדרך דומה. זוהי סיטואציה מעניינת בכיתה כי דרך האנלוגיה היא תמימה למדי- הם חיברו את וקטור C בדיוק באותו מיקום כמו הסקלאר C. מיקמו את מט' הקופקטורים A באותו מקום כמו הסקלאר A. אנו ממתנים זאת בהדרגה, זה מביא אותנו לשאלה מהו פתרון עבור מטריצה ריבועית. נדמה זאת לטורי טיילור לפונקציות אקספוננציאליות. אין לנו סיבה לחשוש ממעברים כאן. כאשר אנו מציגים את הפתרון, הוא אכן מהווה את הפתרון. האם ביכולתינו למתן את הפתרון בדרך כלשהי? נתגלה שאם יקרה דבר כזה בין וקטור C לפונ' הקופקטורים A, הפתרון ניתן לחישוב בקלות. זה בפני עצמו יוצר לנו את היעדרו או חוסר הצורך לחשב וזה נותן מעמד לפתרון בצורה בה עוד לא הצבנו ערכים. מה קורה אם וקטור התנאי מאונך למטיצת הקופקטורים? אולי זהו צירוף ליניארי של וקטורים? ומה אם זה לא המקרה של צירוף ליניארי? וכו'. נתבונן כעת במטריצ A שיש לה בסיס של וקטורים עם כללי חישוב משלהם. אני חושב שניתן לראות כאן שמע' שאלות זו תוביל בסופו של דבר לצורך חיוני באלגברה, וניתן להכליל אליה כל וקטור שעובר דרך ראשית הצירים. ניתן להשוות זאת, דרך אגב, לגישה הקלאסית בה אנו צריכים דיאגנוזות למושגים. ניתן לקרוא כאן שהסיבה לכך שאנו צריכים דיאגנוזות היא שאנו רוצים ליצור מהמע' תוצר כלשהו, למרות שמבחינה מתמטית זה אפשרי ללא ספק, לדעתם התלמידים אין בכך שום צורך אינטלקטואלי אלא מוטיבציה לדחות נושא זה. אז מהו הבסיס האפיסטימולוגי? אומר זאת בזריזות רבה. הכל התחיל מאריסטוטל. הוא טען לאנליזה לאחור- איננו יכולים להוכיח משהו עד אשר תפסנו את מהות הדבר. תפיסת המהות פירושה תפיסת הסיבה העיקרית. רעיון הסיבתיות היה נושא חשוב בתחילת הדרך המתמטית, כי מתמטיקאים ופילוסופים רבים טענו שמתמט' אינה מדעית. לא ניתן להוכיח אותה. דוג' אחת לכך היא היחס 1.32, הפילוסופים מימים עברו שאלו- מהי הסיבה לכך שסכום הזויות במשולש הוא 180 מעלות? היה על כך דיון גדול וטיעונים נוספים שהושמעו שם היו הוכחות ע"י דוגמאות נגד. הוכחה כזו נותנת לנו ודאות אך לא תובנה. הטיעון שאני הכי אוהב הוא שאם ההוכחה המתמטית היא מדעית, אי גם הטענות במתמט' צריכות לקבל את אותו היחס. מדוע? כי אם A רומז לB הרי שA גורם לBה לקרות, B מרמז לA אומר שB גורם לA לקרות, וכך A גורם לעצמו, וזה נכון אבסולוטית. עלי לציין כי משמיע הטענה, שלא תמך בהוכחות ע"י דוג' סותרות, השתמש בכך כדי לתקוף דוג' סותרות. תודה.

איבי קידרון, הקולג' לטכנולוגיה. חיפשתי את טד. כאשר אני מסתכלת על טד, אני נזכרת שנפגשנו ברוב הפעמים בישראל. ידעתי שמישהו פה פגש אותי בודאות גדולה. אנו מדברים על נימוקים ובניית ידע. עבור פאנל זה קראתי מאמר מדעי מאוד מעניין, המחקר שלי לגבי נימוקים היה עם טומי, כל מקרי הבוחן שלנו עברו מיקרו-אנליזה. יהא זה מעניין לפתוח במקרה חקר שחקרנו, ולשאול שאלות כלליות שעשויות לנבוע ממחקרינו. אנו מתמקדים בקוגניציה של הלומד. אנו משתמשים בסדרה הקשרים אבסטרקטיים ואנו מתמקדים על היחסים בין תהליך הנימוק לבניית הידע של הלומד. מאוחר יותר מתמקדים במה שהנימוקים צריכים להכיל עבור הלומד, ודפוסים מעניינים של מבני ידע שחשפנו במחקרינו. השאלה הראשונה, שמתקשרת למה שקייט שאלה, כקוד התנהגות, השימוש בנימוקים נראה אצל רוב המתמטיקאים. אנו לא עושים הוכחות ע"ב עדויות כמו תלמידינו, מדוג' אחת או 2. עם זאת, לא לכולנו יש אותה השקפה לגבי נימוקים. למשל, למס' מתמטיקאים, נימוקים- או אצל מחנכים למתמט', הם תובנות לחיבורים שמתחת להצהרות שיש להצדיק. ערכנו ניתוח ייחודי למורה למתמט' בשם אל. הבעיה היתה בהעבר. זמן ממחזור 4 למחזור 2, אל ידעה היטב מהו חלק הדורש העברה. הנימוק שלה לא שהיא לא הזדקקה לוידוא, היא עובדת עם מחשב ויש לה עדויות אמפיריות. עם זאת, היא התעניינה בחיבורים הפנימיים שמאחורי ההצהרות הזקוקות להנמקה. דעה זו קרובה מאוד להשקפתה של רוטה בספרו הנהדר מ1997, "המקור שאינו ניתן לפרק", בספר זה הוא הכיר לנו את ההארה, כפנים החיבורים התומכים בטענות שיש להצדיק. המשפט החשוב ביותר שאצטט כאן מהספר, הוא ששינוי לוגי בטענה אינו מאיר לנו כפי שעושה הטענה. דיברנו כבר על דעתו של צ'רסון, ששאל האם מתמטיקאים צריכים להקדיש יותר תשומת לב לתקשר עם אידיאלים מתמטיים. עוד שאלה- האם זה נכון שרק הוכחה מספקת ודאות למתמטיקאים? או- האם השקפה הטרוגנית נשענת על הדומיינים השונים במתמט'? ברצוני לתת דוג' למתמטיקאי, קיי נופורד נולג', שנשאל לגבי הבעיה הבאה: הראה לנו שהפונקציה שואפת לאינסוף כאשר X שואף ל+- אינסוף. מהו ערך המינימום? עבור קיי, נימוק אינו מתמצה רק בלהראות את המתבקש ממנו, עליו להוכיח את כל התיאוריה. ההוכחה שלו לפרמה, בניגוד לכך, נותנת לנו הארה וזה מאפשר לו להתגבר על תהיותיו, שאולי תימצא פונקציה מטורפת שלא ניתן לסתור אותה. חזרנו לקיי. יש לנו שאלות חדשות- הראשונה והחשובה, והיא כבר הופיעה במצגתו של קיי, תוספות תת-רגולריות לתהליכי הבנייה של הנימוק, שצריכות להתבטא אצל מתמטיקאים וסטודנטים, אני מאוד מעוניינת בשאלה זו, מאחר ועבודתינו היא לנתח את התהליך בה המתמטיקאי והתלמיד בונים נימוקים. מה שנראה כמקרה של קיי ואחרים, הנימוקים הם תהליך של תפיסת מבנים נבחרים קודמים. כפי שראיתי במחקרה של אנני, היא שאלה כיצד התלמידים מתמודדים עם ההיבטים של ההוכחה, ואחת התשובות היתה יישום תיאוריות מוכרות קודמות ושיפור הגדרות. ניתן לגלות כאן את המושג של metbefore- "כבר ראינו זאת", של דיויד, כמבנה שיש במוחינו כיום כתוצאה מחוויה שנתקלנו בה בעבר. מה שמעניין במיוחד בנימוק הוא שבמצב חדש, חוויית העבר יכולה להיות עוזרת או בעייתית. ברצוני לחשוב כיצד ניתן לעשות זאת באופן יעיל ולא בעייתי. זהו מקרה של נימוק. לצורך כך נאלצתי לחקור מעט לגבי קיי. לא אעבור על כל ההדגמות שלו, אך אדגום מס' מהם כדי שנוכל לענות על השאלה הגדולה. קיי כתב בראיון כי הוא לא ידע כיצד נראית פונקציה. חשבתי על X בריבוע, SINX, וכו', כדי למנוע מעצמי לעבוד אך ורק עם פונ' מונוטוניות, רציתי לדמות פונ' עם אוסילטורים בלתי נשלטים. ראיתי שלמרות האוסילטורים הללו, עדיין ישנה מגמה ברורה. היה לי ברור כי עלי להשתמש בעובדה כמו מבנה אוסילטורים, אינטרוולים אינסופיים, תכונות טנזין, נק' קיצון, תיאוריות על פונ' חישוביות, וכו'. היה לי ברור כי ההוכחה תיעשה ע"י סתירה. משנשאל מהי הוכחה ע"י סתירה, הוא ענה שבסוף הוא נזקק להגדרה המדוייקת של נטייה לאינסוף. חשתי כי שכחתי זאת לרגע. הייתי עדיין מוטרד מהאוסילטורים האחרונים שראיתי בדמיוני. הוא הוכיח את טענתו, את משהו היה חסר- הוא נזקק להגדרה פורמלית. נחזור לקיי אח"כ. ניתן לשאול שאלה נוספת- האם כל נימוק של מבנה ידע חדש, ואני מתייחסת לתהליכי הבניה, מהיסודות למבנה הסופי, האם כדי לבסס קישורים חדשים אלו על הלומד ליישם ידע קודם ולהוכיחו? ע"מ לעשות את חוויות העבר יותר עוזרות. למשל, במקרה של קיי, יש לנו חיבורים בין ענף רופף לענף חזק. מה היה הענף החזק? מודל החשיבה של קיי עם המבנים הקודמים שנבחרו, תיאוריות וכו'?מה היה הענף החלש? המשמעות שנתרמה למשפט הגבולות המרכזיים? המשמעות האינסופית שהפונ' גדלה באופן אינפי' היא מספיקה כדי שהפונ' תתנהג כצפוי. אין זה המקרה בפונ' עם אוסילטורים. ניתן להבין כי ברגע בו היתה לו הגדרה פורמלית, הוא הבין שהבעיה נפתרה. שאלה ראשונה היא לגבי דוג' יצירה- קיי יצר הרבה דוג' חישוביות. כפי שאנני אמרה וראיתי זאת במחקרי, ניתן לבקש מתלמידים לשפוט את נכונות כל חיבור. תלמידים, לעיתים קרובות, ששים לשפוט דברים מעין אלו. השאלה האפשרית היא מהי המטרה ביצירת דוג'? האם זה טוב רק עבור עדויות אמפיריות והכרעות? איני סבורה כך. או שמא עלינו להעדיף להוכיח את המשמעות? לעזור לשפוט את הבעיה ע"י שימוש באמיתות החיבורים? אולי זהו המקרה בו 8 מתמטיקאים שקיי ראיין? נוכל לשאול אם מקרי החקר של קיי והיבטים ששילב, של ענפים חזקים וחלשים, אלו וצורות אחרות לנימוקים, האם הם יוצרים תבנית? ברצוני לסיים בהארה: פרסמנו את מחקרנו ב2006. רק מאוחר יותר, ב2010 עשינו את הקישור בשילוב הארות, רק בסוף הניתוח. במקרה חקר זה, הארה מגיעה כאשר צירוף נבנה. באינטגרציה של צורות חשיבה שונות, עם ענף חלש וחזק. לא אכנס לפרטים כי עלי לסיים, אך רוטר כתב בספרו על דרגות של הארה. זה מעניין מאוד. לא תמצא דרגות של הוכחות פורמליות, אך זה קיימות דרגות הארה. אני חושבת שהארה ופירוש מסתדרים היטב יחד, ולשאלתי האחרונה- איך תלמיד יכול להתוודע אל היופי והתשוקה לטיעון מתמטי? שאלה זו נשאלה ע"י דרייפוס ואייזנברג במאמרם מ1996. הארה, כמו שהיתה לנו במאמר מ2010, נתפסה כהבהרה שבבסיס האסתטיקה של תהליך הפיתרון. אך זה גרוע- יותר מאשר אצל דרייפוס ואייזנברג. הערכת דפוסי החשיבה המתמטיים היא מיושנת. כאשר אני קוראת שנית את המאמר הזה, חשתי בכך. רציתי מייד לנסות את ההוכחות ברציונליות, לנסות למצוא מורכבויות כאלו, נהניתי מאוד מהמאמר. אני חושבת שחשוב מאוד לנסות למצוא דרך בה תלמידינו יהנו מיפי המתמט'.

אנני סלדן: בסופו של יום ארוך, אני חוששת שלא אהיה פילוסופית ומתוחכמם כמו קודמי. אך אולי תמצאו את הרצאתי מעניינת. בעלי ג'ון ואני, אנו עובדים יחד, דיברנו אך עוד לא כתבנו על ז'אנר ההוכחה. דיברנו על תלמידנו, זה לא נראה כמו מאמר אלא יותר כמו סיפור קצר, לאחר שאאשר זאת בדרך כלשהי. אולי זה יהיה רע עבור החינוך המתמטי, כי אנו חושבים שתלמידים צריכים לכתוב כמו מתמטיקאים- פרט אולי לקיי. לפחות ישנם חלקים מהם. כדי להגדיר ז'אנר הוכחה מהו, אולי כדאי שננסה למצוא אותו. אין זה דבר שנוכל באמת להגדיר. ערכנו מחקר מוגבל, ומעולם לא פרסמנו אותו. לפני מס' שנים היינו במוסד להשכלה מתמטית, חיברנו מתמטקאים, מורים בתיכון, ומחנכים למתמט'. ניצלנו את ההזדמנות לשאול את המתמטיקאים מס' שאלות. זו לא השאלה כולה אלא רק ההתחלה שלה. שאלנו אותם לגבי מאפיינים של הוכחות שפורסמו. כדי לבסס זאת, ביקשנו מהם להביא את מאמר שהם כתבו. בנפרד, ג'ון בירר על ערכו של העיתון המפרסם, והיכן כדאי לפרסם... זה עוד ידרוש עבדה נוספת מאיתנו. אך בכ"ז אציג זאת בפניכם. הוכחות אינן מדווחות בתהליך ההוכחה, לפי מה שמצאנו. לא תמצא בכתבה מתמטיקאי שיאמר- ניסית זאת, אך זה לא עבד. אולי זה ייתן לך תשובה, אך זה לא יגיע לעיתון. הוכחות כוללות מעט מאוד תוספות, שלא כמו טיעונים פילוסופיים. לא מוכיחים ממס' נק' מבט. נכון שמתמטיקאים מאמינים בדיוק ותמצות. קראתי ספר על מדוע הצבע אדום לא נשמע כמו פעמון? זה עוסק במדעות חזותית. סימבולים בד"כ מוצגים בהוכחות, והם מהווים ייצוג של אובייקטים מתמטיים. אתן לכם דוג' רעה במקום טובה: היתה לי התחלה של הוכחה של תלמיד. אנו מלמדים דרכי הוכחה ראשונות בסוף כיתה י'. אני חושבת שהתלמידים נכנסים לאוני' ברמה נמוכה כי לא מלמדים אותם ניתוח אלא רק חישוביות. (מציגה משהו) רואים? זה רק מוסיף לבלבול. הוכחות דורשות הסברים מינימליים על המסקנות, זה הדבר היחיד שאינו מתבקש מיידית. והנה עוד הוכחה לתיאוריה אחרת של תלמיד- משהו על הלוח. ביקשנו מהם להציג מהי כל אות. הוא יכול היה לוותר על השלב הזה. מי היה רוצה לקרוא את זה? הוכחות דורשות סקירה קצרה של חומר מתקדם. למשל, כאשר מייק הציג טיעון, הוא אמר- נניח את ההיפך של כך וכך... עם זאת, הוא לא נתן פירוט של הדבר שהפכנו, הוא הסתמך על כך שאנו מכירים אותו ויש רק לציין את שמו, אין להוכיח את החומר הקודם. ג'ון אמר, עם זאת, שהוכחות ארוכות דוקא דורשות סקירה והסברים מפורטים יותר, כפי שנלמד בביה"ס. אני מנסה לחשוב על הוכחות טיפוסיות לתלמידים... הגדרות כוללניות ניתנות מחוץ להוכחה אך אינן מצוטטות בהוכחה עצמה. למשל- טיפוסי למצוא אצל תלמידי אנליזה בשנה הראשונה, במקרה זה, לתת את ההגדרה המלאה להמשכיות בהוכחה עצמה, במקום לציין ליד ההוכחה "לפי הגדרת ההמשכיות" במקום המתאים. בנוסף, אם תראה הוכחה לטיפולוגיה, לרוב תראה שוב את ההגדרה לטיפולוגיה. הוכחות הן לוגיות באופן מוחלט, ויימנעו ככל הניתן מכמתים אוניברסליים. אני רואה תלמידים שמנסים להשתמש בכל ערכי הX והאפסילון שהם מכירים בהוכחה, במקום לבחור X או אפסילון שרירותיים. מתוך העיתון: הנה מרי- היא לימדה אנליזה למתחילים, ד"ר קיי הוכיח את כישוריה במאמרו. הוא הדגיש זאת ואילו היא חשה שזה לא הולם. עם זאת, היא נענתה לבקשת הפרסום של המאמר. היא מורה, היא יודעת איך לקבל ציונים טובים- לעשות את מה שהמורה רוצה. עם זאת, היא לא אהבה לעשות זאת. זה מה שהיא אמרה בראיון לאחר מכן. לאחר שעברה מחצית מהסמסטר, היה זה הגיוני וזוהי הדרך לעשות זאת. בראיון אחרי שנתיים היא אמרה שהיא לא מכירה דרך אחרת לעשות זאת. יש לנו סכימות התנהגותיות, ולקח לנו זמן רב לקרוא לזה אפילו הרגל מחשבתי עבורה לעשות זאת לבד. ולא רק לעשות זאת, אלא אף לחשוב שזה יאה. הנה קישור שיש לנו- מדוע? איני יודעת, אולי ההיסטוריונים יוכלו להסביר זאת. מדוע הם כתבו זאת כך? אולי הם היו שיכורים, לכו תדעו. לא בהכרח במודע, אנו חושבים שמתמטיקאים כותבים בז'אנר הזה כי הוא עושה את האימות, הקריאה והבדיקה של ההכוחה יותר מהימנות, אך לא בהכרח זה עשה את ההוכחה מובנת יותר או נותנת תובנות. ההפרעות הן מינימליות ויכולת מציאת השגיאות היא מקסימלית. מעט על לימוד- כיצד נשלב זאת בהוראה? תלמידים בתואר ראשון כבר יכולים לאמת את ההוכחות שלהם. לא אכפת לנו לומר על ז'אנר ההוכחות... זוהי שיטה מאוד גמישה, כותבים הוכחה על הלוח, קוראים אותה, מסבירים מס' פעמים את ההיגיון מאחוריה, את הסגנון, כי התלמידים רוצים לעבור את הקורסים האחרים שלהם והם יודעים שברצונינו לעזור להם. כך או כך, מתמטיקאים לא כותבים הוכחות כאלו. אנו מייצגים את הקהילה המתמטית ואומרים להם זאת. זו מעין קריאה מונחה. עוד רעיון הוא להכין תבנית עבודה עבור הוכחות, נראה לי שטד לא אהב זאת, טומי אימץ זאת ופרסם את המאמר, בכל אופן, שיפצנו מעט את הרעיון הזה. אני מדברת אך ורק על הוכחות סופיות שנכתבו, ולא על טיוטות. התבנית להוכחה היא חלק מההוכחה שבנויה מפירוק ושימוש במבנה הלוגי של התיאוריה בטיעון, הגדרות תומכות ותוצאות קודמות. היא לא תלויה באינטואיציה, הבנה ופתירת בעיות ייחודיות. שאר ההוכחה נמצא במרכז הבעיה. זהו החלק בו מעוניינים המתמטקאים. הם סבורים כי שאר ההוכחה היא טריוויאלית. אתן לכם דוג' לתבנית עבודה להוכחה עבור פונ' מתמשכות בנק' A. קושי לא היה אוהב זאת. סליחה, קושי. המצגת הראשונה מציגה את הפונ' הזו, האחרונה את האחרת. זה משום שעלינו לפרוס את הקוים המנחים, אחרת לא נדע כיצד להמשיך בהוכחה. אם איננו יודעים לא להמשיך, אין זה סביר שנגיע לשם. זה אומר שהמצגת הזו... משאירים פה מקום לכתוב... וזוהי תבנית עבודה להוכחה. חלק מהתבניות קצרות יותר. אנו חושבים- ועבדנו עם מורה לאנליזה שאין לה זמן ללמד הוכחות, כי היא מלמדת אנליזה אמיתית. היא ביקשה שנבוא להתנדב עם תלמידיה במשך שבוע. הם לא יודעים כיצד להתחיל לכתוב הוכחה. היא אמרה שהם נוטים לבהות בדף ריק ולא להבין כיצד להתחיל בהוכחה. היא אמרה שאם נלמד אותם כיצד לארגן הוכחה בתבנית, הם יצליחו לארגן זאת במחשבתם- והיא יכולה לעזור להם לכתוב גם נימוקים מילוליים, אם החומר יהיה מאורגן במחשבה. אנו יודעים כי זהו לא סוף הסיפור, אך זה החלק הקל עבורינו, המתמטיקאים. אנו רוצים לעודד את התלמידים לחקור- זהו חלק מפתרון הבעיות. זה דורש לא מעט יצירתיות, לי חסרה, מישהו דיבר על זה קודם- אני עובדת על זה. אולי נגרום לתלמידים להתחיל לאסוף מידע. יש לי פה דוג' מהקורס לתלמידי תואר ראשון- כיצד להתחיל לחקור משהו. אם יש לי קב' ואני רוצה למצוא את זהות E, נרא שS-E... (מראה מצגת). גם זה נראה בתיאוריות הקב', מבנה הקב' לא נראה. עלי להראות קומטטיביות. אין הרבה מה לעשות עם מס' אלו... ואז נראה להם הכפלה בצמוד וכו'. בסופו של דבר, הבסיס הוא איסוף מידע! אינני טובה כ"כ בלימוד, אך אנו מנסים ללמד את תלמידינו לחקור את המצב. סיימתי.

מנחה- יש לנו 20 דק' לשאלות.

קהל: אני מנסה להבין את ההיגיון מאחורי 5 הנאומים. דיוויד אמר לנו לנסות לעשות היגיון בכך. זה קצת יותר תיאורי, אולי נצליח לעשות עם זה משהו. גילה וקית' היו מסיחים - איבי, גרשון ואנני ניסו להמיר לכיוון מסויים- הארות וכו'. הם המירו ל3 דברים השונים זה מזה. האם יש לזה קשר להסחות של קית' וגילה?

אנני: טומי שאל שאלה קשה. תלמידי אומרים שאני שואלת רק שאלות הוגנות, היתה שאלה שלא עניתי לה. אני חושבת שכולנו עשינו את הקטע שלנו, ולא ניסינו להמיר. את שואלת משהו שאינו ממש אפשרי.

קהל- אני ראיתי פה המרה של ממש.

היימן באס, אוני' מישיגן: זו יותר הערה משאלה, 2 דברים בהרצאה מטרידים אותי- הראשון, ההבדל בין הוכחה היא ועל מה היא ההוכחה עצמה. אם תחשוב על דרך הוכחה, בפרקטיקה המתמטית. כמו בפרקטיקות אחרות, היא נוטה להיות התפתחותית. לא מלמדים זאת בקורס מיוחד, יכולתינו להוכיח מתפתחת עם הזמן. ניתן לטעון שהיא צריכה להילמד בכיתות הנמוכות. שנית, רוב השיחה היתה על טבען המתמטי של ההוכחות, או להוכיח פעולה קוגניטיבית של פרט, כחלק מהקהילה הקולטקיבית. אם ברצונם של מורים ללמד הוכחה- ואהבתי את דבריו של גרשון על נחיצות אינטקלטואליות- השאלה שתשכנע אותי בלימוד היא- מדוע הדברים נכונים? זה נכון בכל תחום לימוד. במתמט', ההוכחות הן העונות לשאלה זו. תלמידים מתרגלים ששואלים שאלה זו- בד"כ המורה שואל זאת. בד"כ אין לתלמידים את מקורות המידע שיתנו תשובה משכנעת. השאלה היא מי שופט את ההכרעה או נכונות הטיעון. זה חייב להיעשות כחלק מהלימוד, שהתלמידים עצמם הם האחראים להראות את נכונות ההוכחה שלהם. אם התלמידים לומדים כיצד להוכיח, זה כרוך גם בלמידת פסילת הנכונות בהוכחות של אחרים. זה יהיה לא מושלם בכיתות נמוכות, ויתפתח עם השנים, כתלות באיכות ההוראה והלמידה. לימוד דברים מעין אלו הוא מסובך ביותר וכנראה שלא נחקר כראוי. בנגע לדיון על הספרות- ישנה הדגשת יתר של טבעה של ההוכחה והתפתחות בדיסיפלינה, וזה חשוב, אך אני חושב שזה מונע מנושאים אחרים בתוכנית הלימוד להילמד כראוי, כמו לתת הזדמנות לתלמידים ללמוד את הפרקטיקה המתמטית הזו.

גילה, אוני' טורונטו. כאשר מדברים על הוכחות שאינן פורמליות, וכיצד מתמטיקאים עושים זאת, אני חושבת שישנם יישומים רבים להוכחות אלו. למשל, הוכחות במתמט' נסמכות רבות על הידע ברשות המוכיח, והיכרות המוכיח עם המתמט'. זה רלוונטי לכס זה. זה קשור יותר למתמט' הנלמדת בביה"ס. לא על המתמט', לא שוויון, לא דברים אחרים- אלא יותר כלים שנותנים לתלמיד כדי שידע לקשר בין דברים, שידע לנמק ווודא דברים, כי עליך לזכור שראית משהו אחר או שאתה יודע משהו שניתן להביא בהוכחה זו. אני חושבת שיש הרבה מה ללמוד מכך. כיצד מתמטיקאים עושים זאת, והמשמעות של זה היא חשובה, כי במתמט' עצמה, ככל שמלמדים יותר מתמט', ככל שהתלמידים יודעים יותר מתמט', כך הם מסוגלים לחיבור נושאים יחד, ליצור הוכחות, ולעיתים גם לפתור דברים בדרכים טריגונומטריות, אלגבריות וקטוריות ועוד. זה בא מהמתמט'. הם יודעים לחבר דברים ביחד מהידע שלהם, ולא מהידע על ההוכחי. מה רלוונטי לחבר יחד בהוכחה מסויימת?

גרשון הררה- הסביבה בכיתה שמשמשת לקידום רעיון ההוכחה חייבת לכלול- וזת מניסוי שערכתי- את מה שאני מכנה מטא-הוכחה. כלומר, עלינו להצדיק לא רק את המחקר אלא גם עלינו לאמת את קיומו של המושג, הולדת המושג והרעיון. זאת ע"י חקירה ארוכה ומלאת משמעות. אחרת, תהיה הפרדה בין הדרישה לאמת את הביטוי וקבלתו של המושג כקיים. וזאת ללא כל הבנת מושג מצד התלמידים. איני מדבר על נימוק חוק לוק- אם אתה לומד זאת, תקבל ציון טוב או שתשתמש בזה כדי להוכיח מחר דבר מה, אני מדבר על הולדת הידע עצמו. אם שני דברים אינם מסתדרים, יתכן שתהיה לך הוכחה יפה, אך התלמידים יאבדו. זאת משום שהמושגים בהוכחה אינם מנומקים. זהו הרעיון שבנימוק אפיסטימולוגי. זה רומז למושגים בתלות ליניארית. מהיכן הם באים? מדוע הם נחוצים בהוכחה זו? מדוע התלמידים צריכים להתוודע אליהם?

(נראה לי שאנני): ברצוני להגיב להערתך. אני חושבת שניתן ללמוד הרבה ולהעביר זאת לכיתה. כאשר אנו בוחנים כיצד תלמיד מתמט' בונה את ההוכחה, כמורה אני חוששת מתבנית עבודה כזו. עלינו להכין פעילויות בכיתה שמעודדות תלמידים לבחור מבנים קודמים ולנסות להתחיל מנק' מוצא זו ולבנות ידע חדש. המורה נוכח בכיתה ויכול לסייע בבניה. כדי להשיג הצדקת תהליכים. ובאשר לתפקיד המסביר של ההוכחה של גילה. אני חושבת כי זה חיוני בכיתה.

יוהנה, אוני' פטרון. ראיתי ברשימתך שקיפות של רשימה. איטה זכרה נכונה ואמרה שהוכחה חייבת לעשותך חכם יותר. נתחיל מכך. מה שדיברנו עליו היום עד עתה, היה האפיסטומולוגיה שתרצה במקום ההוכחה. מנק' מבט חינוכית, חשובה מאוד התקשורת בהוכחה. אנו מתקשרים עם תלמידנו. הוא אמר שהצורה בה הידע שלנו בנוי דומה פחות או יותר לצורת ארגונו. מסגרות העבודה להוכחה- מה זה אומר "כיצד לארגן ידע קיים?" אם ידע זה אכן קיים. מה זה אומר, לבנות תוכנית עבודה להוכחה? אני מנסה בהוראתי- אם אתה רוצה הוכחה בגישה אינטואיטיבית, זהו תרגיל שנתתי לתלמידי, להעביר זאת לצורה יותר מקובלת ואקסיומטית. ברצוני לשאול על מחקרך, כי אני מאוד מתרשמת מרמת תלמידיך, שבמקרה שלי אנו מתחילים מרמה נמוכה יותר. סוג הפתרון לשאלה דיפרנציאלית הוא קשה להבנה. אם התלמידים מכירים את השאלה, הם ידעו את סוג התשובה הדרושה. החשיבה מאחורי זה היא בעייתית

גרשון- ביחס לרעיון הארגון, זה שונה וחשוב- אבהיר כי הפדגוגיה שמניעה את המורים היא ארגון הידע ולא מבנה הידע. זוהי כוונתי. איני אומר שהדבר בה הידע מאורגן אינו המבנה שלו. ובאשר לארגון הידע, אחד הדברים שלמדנו מהמחקר הוא שהידע מופנם ומאורגן ע"י חזרה. המילה "חזרה" נעשתה לדגל אדום. היא אינה משהו שעלינו להזכיר. בשיטה שפיתחתי, חזרה היא חשובה. חזרה של מה? במקרה הזה, חזרה על נימוק, נימוק חוזר יעשה יותר משכנע, ועבור תלמידים, להפנים, לארגן ולהבין את הידע נותן להם גישה קלה יתר אליו. נימוק אותו הדבר שוב ושוב בדרכים שונות, זה נוסה ע"י מס' חוקרים על תלמידים. החזרה על הנימוק נעשית עד לנק' בה התלמידים מרגישים בטוחים בנימוק, כי הם מסוגלים לפרט בדיוק ממה הוא מורכב. תשובה קצרה- הדגשה של נימוק חוזר.

קהל: אני רוצה לציין שחסר משהו בדיון זה על ידע. בניית הוכחה, בד"כ נעשית בגישה לא מסודרת כדי לקבל את ההוכחה. עד שקיבלת את ההוכחה היא כבר לא נראית מאוד מושכת, לכן משפצים אותה. כאשר מציגים אותה בצורתה היפה יותר, היא שונה לחלוטין מהדרך בה הגענו אליה לראשונה. כאשר אנו מציגים את ההוכחה לתלמידים, אנו מראים להם את ההוכחה היפה והמשופצת. רוב התלמידים מגיבים ב"בחיים לא הייתי מגיע להוכחה כזו"! למען האמת, גם אני לא.

אנני: דיברתי על הוכחות מוגמרות. מתמטיקאים מצפים מתלמידיהם לתואר ראשון לכתוב הוכחות מוגמרות. אהבתי את עבודתה של אילנה, יש לה מאמר בה היא נותנת לתלמידיה לכתוב טיעון. הם לא מצליחים להעביר אותו- אין זה טריוויאלי להעבירו להוכחה מוגמרת- שום דבר אינו טריוויאלי! בברזיל דיברו על יחידה קוגניטיבית. ישנם טיעונים שלאחר שהובנו, קל מאוד להעבירם להוכחה מוגמרת- אך ישנם טיעונים שאינם כך. אם נתייחס להוכחה על פונ' מתמשכות, לא נצליח לתפוס את הרעיון בקלות במעבר להוכחה. רק רציתי לומר שלכתוב הוכחה מוגמרת אינה קלה.

קהל: רציתי להוסיף שאל לנו לשכוח שישנו ערך רב בהצגת הוכחה מוגמרת בצורתה היפה לתלמידים. זהו חלק מעיצוב פירוק ההוכחה לרעיונות המקוריים. לאחר שהתלמיד למד דרך חשיבה זו, והכיר את מקור הרעיון, זהו תרגול נהדר והכרחי להציג את ההוכחה מההתחלה ועד הסוף, ולהבין מהם הרעיונות המקוריים. יש מקום לשאול שאלה זו לאחר היכרות עם היסודות, כיצד המתמטיקאי הבין את הרעיון, מהם המושגים והידע שהשתמש בו עבור ההוכחה.

תם זמננו.