**ההיסטוריה של המתימטיקה והחינוך המתמטי – רב שיח**

**בהשתתפות: לואיס רדפורד (מנחה), אלן ברנרד, פולביה פורינגטי, מייקל נ. פריד, נטלי סינקלייר**

בוקר טוב, שמי לואיס רדפורד, ניתנה לי הזכות להיות המנחה בפאנל זה. הפאנל הזה נוצר כדי להתמודד עם שאלה רחבה מאוד. תפקיד ההיסטוריה בחינוך המתמטי. חברי הפאנל לא יענו בהכרח על שאלה זו, אלא רק יעלו מספיק חומר לדיון עבור הקהל. תפקידינו הוא לא רק לנסות לענות- תראו מיד שאין תשובה אחת ישירה לכך, אלא להיות פרובוקטיביים, ע"מ ליצור פה דיון מעמיק ככל הניתן. חברי הפאנל הם: אלאן ברנה, מצרפת, פוליה פולינגטי מאיטליה, מייקל פרי מישראל, ונטלי סינקלייר מקנדה. אלאן הוא היסטוריון מקצועי למתמטיקה, שייתן לנו הבנה כלשהי על מקורות היסטוריים. נטלי, מייקל ופוליה הם חוקרים ידועים לחינוך מתמטי, עם מגוון נושאי מחקר. נטלי כרגע עורכת משנה לאחד המגזינים הטובים בעולם בתחום, במגזין על למידת מתמטיקה. מייקל הינו עורך של אחד המגזינים הטובים בעולם בתחום, חשיבה ולימוד מתמטיקה. פוליה היה יו"ר המועצה ללימוד מתמטיקה העולמית, והוא חבר בוועד המנהלי להיסטוריה ולימוד של מתמטיקה. יש לנו חברה טובה היום, בהחלט. כל חבר פאנל יקבל בערך 10 דק' לדבר. לאחר מכן הקהל יוכל לשאול ולהעיר הערות, לא רק לגבי מה שיאמר פה עכשיו, אלא גם כדי להרחיב ולחדד, ולהעיר על מה ששמענו בנאום הקודם היום. לפני שאזמין את חברי הפאנל לנאום, ברצוני לומר מס' מילים על הקשר הדברים. בפרט ברצוני לחזור לדיאגרמת נורמן שמראה קשרים בין מתמטיקה, חינוך מתמטי ומחקר על חינוך מתמטי. המתמט' מופיעה כדומיננטית בשלושת משתנים אלו. עם זאת, אין זה אומר שהתפיסה של מתמט' זהה בכל המקרים, אפילו לא באותה קהילה. מוזס ניס הראה במחקרו, מתמטיקאים מסוימים תופסים מתמטיקה כידע מאורגן סביבתי ורעיונות פנימיים וכו'. אחרים סבורים כי מתמטיקה היא דרך לדעת. תפיסות אלו הן לחלוטין שונות זו מזו. גם חוקרי מחקר מתמטי תופסים מתמטיקה בדרכים שונות. למשל- חלקם תופסים מתמט' כדבר שצריך לגלותו, או דבר סובייקטיבי שהתלמיד יוצר בעצמו. חלק מהמתמטיקאים יצרו במהלך הדורות כללים, ותלמידינו מתוודעים לכללים אלו. למרות ההבדלים הללו, אנו, חוקרי החינוך המתמטי, נוטים לראות מתמט', ובפרט מתמט' של ביה"ס יותר כפעילות, או חינוך מתמטי, לפי עבודתו של גורסקי, כדרך מוסכמת לנימוק והוכחה, שהתלמיד מתוודע אליה ע"י תיווך המורה והכיתה. חינוך מתמטי לא יכול להיות מובחן רק במונחים של התלמידים בהם הם חושבים על מתמט' של ביה"ס. בנוסף, היא נבדלת גם במושג המוגדר בצורות שונות של למידה. למידה היא מושג חינוכי, ולא מתמטי. כדי להבין את מושג הלמידה עלינו לפנות למקורות אחרים, שאינם מתמטיים. ראסט לרמן ונורמן פרסלג עשו זאת. דבר כזה יוצר פער בדיאלוג בין חוקרי חינוך מתמטי ומתמטיקאים. הנק' שלי היא כי פער זה נראה בלתי נמנע. למשל, במחקר אפיסטימולוגי על תפיסה של ביה"ס ע"י מתמטיקאים, כמו זה שראסט תיאר אתמול, לגבי מושג הגבול, הנבדל לפי הגדרות שונות, שעלינו ללמד. לאורך ההיסטוריה של המתמט', שהיא חלק מנושא הפאנל הזה, ייתכן שהיו גם הגדרות שונות. גם הפרשנות ההיסטורית משתנה לפי התפתחות תפיסת המושגים המתמטיים. במחקרו, נילס נתן לנו דוגמא יפה כיצד המורים השיגו תובנות מועילות בהבנת המתמטיקה. עם זאת, הפניה להיסטוריה אינה חד משמעית בתהליך. באותה דרך בה יש לנו תפיסות שונות ללימוד מתמטיקה, ישנן גם גרסאות שונות להיסטוריה. תפקידה של ההיסטוריה מופיע בתיווך בין הנחותינו לגבי מתמטיקה, הנחותינו לגבי למידת מתמט' וההיסוטוריה של המתמט'. בתפיסת ההיסטוריה, שרווחה עד לפני כ30 שנה, היה נפוץ כי ההיסטוריה וההיסטוריה של המתמט' בפרט עוקבות אחר נתיב טבעי, לפיו המתמט' נובעת מלוגיקה פנימית. לפי תפיסה זו, ממט' וצורות אחרות של חשיבה אנושית, התפתחו בהדרגה בלי להיות מושפעת מהקשר גיאוגרפי, בו התפתחויות אלו קרו. תפיסה זו פותחה ע"י הפילוסוף הגרמני עמנואל קאנט. פיאז'ה אימץ תפיסה זו באפיסטימולוגיה הגנטית. מחקרים עכשוויים באנתרופולוגיה ומתמטיקה מאתגרים תפיסה זו. אני מציע כי תפיסות מתמטיות התפתחו מהקשרים תרבותיים ותפיסות עולם שונות. הצעה זו מבקשת לבטל את ההנחה שהתפיסות של מושגים ותיאוריות מתמטיות נובעות מנתיב טבעי שאינו מושפע מהסביבה. תרבות, עם המבנים הסמלי והפוליטי שלה, משחקת תפקיד חשוב במתמט' וחינוך מתמטי. מאחר והתרבות השתנתה, הרעיונות הנטורליסטיים, שהחשיבה המתמטית של התלמידים עוברת את אותו תהליך כמו התהליך שעברה ההיסטוריה, כבר לא יכולים לעמוד בפני עצמם. כתוצאה מכך, ההיסטוריה של המתמט' כבר לא יכולה להגביל עצמה ללימוד התוכן המתמטי, אלא גם ללמוד את ההקשר ההיסטורי בו אותה מתמטיקה נוצרה והוגדרה. באופן טבעי, אתגרים חדשים מעלים שאלה זו. ברצוני להעלות 2 שאלות באדיבות נילס, שניסחתי אותן מחדש. לאיזה טווח ההבדלים הגנטיים במחקרו של נילס יכולים לתפקד כהנחיות להכליל היסטוריה של המתמט' בהוראה? כיצד, או עד לאיזה גבול, העקרונות הגנטיים יכולים ללמד אותנו על מתמט' או על ידיעת מתמט'? האם ניתן להיות מתמטיקאי טוב בלי להכיר את ההיסטוריה והתפתחות המתמט' לאורך הדורות? אוה שאלה יכולה להישאל לגבי מורים למתמט'. שאלתי האחרונה בכנס זה, היא שנאמר שמתמט' לא יכלה להצטמצם להגדרות הטכניות שלה בלבד, חשיבה מתמטית אינה רק הרציונל לפיו אנו חושבים, היא כוללת גם רכיב אסתטי ורגשי. מה מתמטיקאים צריך לדעת על כך? חברי הפאנל יוצגו לפי סדר אלפביתי של שמם הפרטי. ברצוני להזמין את אלאן להתחיל.

אלאן: לפני שלואיס מוצא את המצגת שלי, אומר מס' מילים לגבי סיבת הימצאותי כאן. אני משער שזה בגלל שיש לי 2 נק' משותפות עם טד. הראשונה היא חבר משותף טוב לשנינו, מייקל פריד, ושנית הוא הוויכוח המתמיד של שנינו עם מייקל. אני בא לכאן כל שנה, וממשיך בוויכוח המתמשך עם מייקל ובכל פעם מגיע להסתעפויות נוספות. אז אני שמח מאוד לפגוש אותך, מייקל. התגובה שלנו לנילס מניבה תובנות וגישות חדשות להיסטוריה של המתמט' בהוראת המתמט'. נתחיל במס' דברים בסיסיים שמרומזים בכותרת, בעיקר שניסיון זה צריך להיות גם להיחשב כנושא היסטורי. נביא תובנות היסטוריות והקשרים רלוונטיים. טענתי הבסיסית היא, כפי שנילס ניסח בבהירות, שאלות סבוכות, כמו הכנסת התובנות ההיסטוריות ללימוד המתמט', תרתי משמע, תמצא אנשים רבים עם טון מתנצל שיאמרו שתלמידים נלהבים תמיד ללמוד. זה לא תמיד נכון. מעניין לציין כי האנושות תמיד התמודדה עם אתגר זה. שנית, כיום אנו בסיטואציה שבה הידע על ההיסטוריה של המתמט' הוא בבחינת הכרחי בחינוך למתמט' או אפילו בחינוך למדעים. אם כבר דנים בשינוי מטרות, צעד חשוב מאוד הוא ליטול לחץ זה מהמורים, והנק' העיקרית האחרונה שלי, למעשה, הוא שההתבוננות על כל הנושא צריכה להיות מעוגנת במידע רב על היסטוריה. בנוסף, אני היסטוריון של מתמט' עתיקה. איני עובד על המתמט' של המאה ה18 או ה19, אך אני מתדיין על נושא זה רבות עם עמיתי. ההיסטוריה הקשורה ללימוד, עבורי, קשורה לנק' רבות היום בהצעתי לקונגרס. לגבי המכתב עליו מבוסס הטיעון, עלי לציין שהוא אכן מציע התבוננות היסטורית לגבי מצבינו הנוכחי. אני משווה למה שקרה בתחילת המאה ש20. עלי לציין, ואמרתי זאת למייקל, שאינני מסכים עם ההיסטוריה שהתבססה מהטיעון הזה. אני מסכים מאוד עם הרעיון שההתבוננות על נושא זה צריכה להיתמך ע"י תובנות היסטוריות, שקיימות מאז המאה ה19 לפחות. למשך זמן ארוך, הבנת המצב הקיים, חשוב מאוד להבין שחינוך מתמטי צריך להילמד בדרך כללית בה הוא גם תחום מחקר ומשמעות, גם הפעילות של לימוד המתמט' או אפילו, כמו בנאומו של מוהם, הארגון של המוסד האנושי להשכלה. בניגוד לדברי נורמה וטד, שאמרו כי מחקר על חינוך מתמטי הינו תחום מחקר אקדמי שלא התקיים או נתפס כך בתחילת המאה ה20, מנק' מבט היסטורית, הכרה זו הינה קריטית. כך ניתן לומר, שמס' מתמטיקאים דגולים, היו מעורבים מאוד בחינוך מתמטי, בעיקר ברפורמות בתוכניות הלימוד ובמתודות. בנוסף, אני טוען כי רמת ההתעניינות בחינוך מתמטי של מתמטיקאים בפרט, או ע"י פוליטיקאים בכלל, גברה, וניתן לראות מעורבות גדולה של מתמטיקאים ומחנכים במגמה לשפר את המצב הקיים. כפי שנילס אמר, ציר הזמן צריך להיות מרומז כאשר מדברים על התרומות במהלך ההיסטוריה, ואין להתעלם ממנו. ישנן סיבות היסטוריות עמוקות לדאגתם של רבים, אם למעורבותם, לגבי הרפורמות התחיקתיות בחינוך המתמטי, מאז המאה ה19. ניצה העלתה נק' מעניינת ביום שני, איני בטוח היכן היא כרגע, לגבי טבע ההתפתחות של המתמטיקה. הוויכוח בפגישה זו הוא לגבי "תקופת זהב", בה הרעיון עצמו לגבי מתמט' מהי או מהות החינוך המתמטי, מוגדרים היטב ונותנים לנו מרחב פעולה והסכמה. אני חושש שאין זה נכון. למשל- בשלהי המאה ה18, רוח התקופה אופיינה בשינויים מהותיים, בעיקר בענייני חומר ורוח. דוגמא טובה היא הפונקציות, או האנליזה. הן נכנסו לתוכנית הלימודים בחינוך המתמטי העל יסודי, בזכות מתמטיקאים של אותה תקופה. לפני כן, נושאים אלו נלמדו רק בלימודים גבוהים יותר. יכולתי לתת עוד דוגמאות רבות. השאלה היא, מדוע אותם אנשים הרגישו את הדחף לשנות? מה שאני אומר הוא מעין ספוילר, אבל כאן אם נדבר בכללית, ניתן לראות שהמתמט' עצמה במאות ה18 וה19 וגם לאחר מלה"ע ה2, עברה שינויים דרסטיים. השינויים הללו מקבילים לשינויים הדרסטיים שחלו במבנה החברתי. טכנולוגיות, תעשיות ותחומי מדע חדשים התפתחו. שינויים אלו סחפו עימם אנשים רבים. המתמטיקאים, בין השאר, השתנו. תחומים רבים- כלכלה, מדע, פוליטיקה, וזה כולל חינוך פוליטי, למשל- טד ציין בטעינו הפותח, כי חלק גדול מהדאגה לגבי חינוך מתמטי התחיל בשיגור ספוטניק, והתדהמה שהתחוללה בשל כך בעולם המערבי. לדעתי, זוהי אבן דרך היסטורית משמעותית, שניתן להכלילה גם על העולם במאות ה18,19, ו20. עובדה היסטורית אחרונה, שקשורה לזו שכרגע ציינתי: מאז שהשאלה לגבי השינוי בחינוך המתמטי הועלתה בעולם לאחר המהפכה התעשייתית, מאז המאה ה19, עלתה גם השאלה של התוודעות להיסטוריה של המדע בכלליות וההיסטוריה של המתמט' בפרט במסגרת תכנית הלימודים. זה קרה לפחות בצרפת, במקום אותו אני מכיר, הקולגות שלי בדרום קוריאה חקרו זאת, אירע שהיה פיצול בתוכנית הלימודים בין החלק ההומאני שהורד לאט מגדולתו (כמו לימודי דת, למשל) והחלק המדעי-טכנולוגי שהתפתח במהירות. ובאשר להיום, הרצון של דורות רבים להכניס את ההיסטוריה של המתמט' לתוכנית הלימודים נעשה מרכזי יותר, וכעת היסטוריה זו מהווה חלק נכבד בתוכנית הלימודים. זה אומר שתוכנית הלימוד צריכה לכלול יותר היסטוריה ואפיסטימולוגיה, ויותר נושאים חברתיים, בכלליות. עלינו להיות מודעים לכך שזה לא דבר חדש, וכל השינויים הללו הם פריה של דאגה מתמשכת לנושא לאורך דורות. אני חושבת שעלינו להיות מודעים למורכבות של שינויים אלו במדע, ולעסוק במדע כתחום יותר תלוי תרבות . כעת, אציג הצעת נגד לחזרה לרקע ההיסטורי: ראשית אומר כי אני מסכים עם הצעתך בה קוראי מקורות היסטוריים על מתמטיקה יושמו בעמדות פרשנות לגבי מקורות אלו. הם צריכים לקבוע עד כמה מקורות אלו צריכים להילמד. החלק הטוב בהצעה זו היא שהיא פונה לקשיים שציינתי בהתחלה. כאשר שמעתי לראשנה על הצעתך, חשתי מעין הקלה, בהשוואה לתפיסה המסורתית של נושא זה. הצעות אחרות, כמו זו של מייקל לגבי יחסים מתאימים בין היסטוריה של מתמט' ולימוד מתמט', מגיע בסופו של דבר לזה. מייקל כבר התריע בפני שזה לא מספיק קיצוני עבורו. הוא בטח יסביר זאת בהמשך. כוונתי היא שהצעות מסוג זה צריכות להיות מובנות לפי הרקע ההיסטורי, כפי שסיכמתי כאן למעלה. כדי לקצר, המקרה המוזר שדיברתי עליו, מצד אחד- וזה יהיה ברור יותר בסוף, רוב התלמידים למתמטיקה מתבקשים כמורים לעתיד לפתח מתודות הוראה, שניתנות לפרשנות, והם אינם מוכנים מספיק לשם כך. מניסיוני, רבים ממורים לעתיד אלו אינם מיומנים דיים כדי לפתח דיון על נושאים מורכבים, בע"פ או בכתב. למשל- פיתוח דיון על כמויות אינפיניטיסימליות, אם תציע מטלה זו למורה כיום, רוב הסיכויים שהוא יירתע מכך. מצד שני, מורים למדעי החברה, כמו להיסטוריה למשל, אינם בטוחים שתלמידיהם מחזיקים בעמדה מורכב מספיק לצורך דיון על מסמך נתון. רעיון זה מורכב יותר אצל תלמידי מדעים. בזמן המועט שנותר לי אספר כי השאלות הללו מועלות בעקבות מה שמיכל העלתה, איני יודע אם היא כאן, לגבי טכנולוגיות חדשות. זאת מאחר וכעת מדעי החברה מתחילים להתבלט שוב, וזה משנה את היחס בין מדעים למקצועות הומאניים ומדעי החברה בכלליות. אך איני מתכוון לפתח כרגע רעיון זה. תודה.

שמי פוליה פולינגטי, ואני מנסה להדגים מס' אספקטים בהיסטוריה בכיתה. פגשתי את טד לראשונה בפיאמי. זה בטח מה שהיסטוריון יאמר לאחר כנס זה. הוא היה לי לידיד כי התחלתי את הקריירה שלי מאוחר יחסית בתור חוקרת חינוך מתמטי, והוא, במהלך כתיבת העבודות שלו עם טומי, שימש לי כמדריך בבחירת דרכי. לכן אתייחס לחלק מעבודותיו של טד כאבני דרך במצגת הצנועה שלי. הראשונה, על ידע של מורים והישגי התלמידים, בתור לקח מעניין מאוד עבורי, ישנו מתאם של קרוב לאפס בין ידע המורים והישגי התלמידים. ישנם גורמים אחרים שנראים כמשפיעים על הישגי התלמידים. אחת משאלותיי הראשונות הייתה לברר מהם גורמים אלו. התמקדתי עד אז בידע המורים. באיטליה, למורים שלנו יש רקע טוב במתמט' כי כולם סיימו 5 שנות לימודי מתמט' באוני'. שיערתי כי הישגי התלמידים, באם נכשלו, נובעים מהידע הפדגוגי המועט של המורים, ולא מהידע המתמטי שלהם. המורים אינם טובים בהוראה. איני הראשונה לגלות עובדה זו. 2 מתמטיקאים, מנדי ר' ופליקס קליין התמקדו על נק' זו, בפרט הם הזכירו חוסר המשכיות כפול, זוהי תופעה שייתכן שגם אתם מכירים, תלמידינו לומדים הרבה מתמט' של אוני', וכאשר הם הולכים ללמד בביה"ס כמורים, הם נועלים בארגז מתמט' זו ושבים למה שלמדו בביה"ס התיכון, ומלמדים בצורה שבה לימדו אותם. זוהי מסורת בהוראת המתמט'. לדעתי, מאחר ואני אוהבת היסטוריה, היסטוריה היא כלי טוב לאתגר אמונות קדומות של מורים ולהכיר להם דברים חדשים. איני הראשונה לציין גם עובדה זו, זה הוזכר ע"י המתמטיקאי אלאן. סליחה שאני משווה עצמי למתמטיקאים דגולים. אולי תקראו טוב ממני פסקה זו שנכתבה ע"י פנקרה, הוא כתב דעות לגבי מדעי הטבע, במטרה לשאוב מהם השראה ללימוד. פליקס קליין, במאמר על אקסיומות אמר כי אינטואיציה מתמטית תמיד תקדים יחסית לנימוקים לוגיים, ותכסה שטחים נרחבים יותר. כיום אני מציגה את עבודותיו בקורסים שאני מלמדת, שמראות שההתפתחות ברוב ענפי המתמט', אינטואיציה התפתחה, קודם והלוגיקה בעקבותיה. ייתכן שאם תקראו 2 פסקאות אלו, תחשבו שהן נוגעים לאהבה, בראשי פרקים. זה לא ממש מדויק, למען האמת, מדובר בתקופה בה הפיכה לאקסיומות וקביעת יסודות היו באופנה. הם ניסו לגלות מהיכן נובעת האינטואיציה. ואך, קליין הזכיר מחקר, אינטואיציה, והאינטואיציה הוזכרה גם ע"י נילס, היא הופיעה גם בעבודה חשובה מאת דרייפוס ואייזנברג. עבודתם לגבי תפקידה של האינטואיציה הייתה עבורי מאוד מרחיבת אופקים בראשית דרכי. ישנו עוד מתמטיקאי שברצוני לציין, איני יודעת אם שמעתם על כך. הוא לחם 50 שנה בג'נואה, הוא היה טייס, והוא עבד במחלקה שלי. הוא אמר שכאשר עובר במדע מציד היבטים כפולים אלו, ייתכן שיבלבלו אותו עם חיידק (תרגום מילולי, בחיי). אני חושבת שזה משקף את דעתי לגבי השימוש בהיסטוריה. חיידקים אלו מובילים אותי לגעת בנושא אחר שעסקו בו אייזנברג ודרייפוס. הם אמרו כי תלמידים רבים אינם ששים במיוחד להדמיה (ויזואליזציה), ולדעתי, קריאת קטע במקור עשויה לקדם הדמיה- ואני נזהרת מעט בהגדרת הדמיה מהי, אחרי אתמול. אני משתמשת בהגדרה תמימה למדי- למשל, היסטוריה לעיתים קרובות יכולה להיות מיוצגת בצורה גיאומטרית. זו דוגמה קצת מופשטת מזו שיש לי במחלקה, לגבי העבודה של בארו. הייצוג הזה מתאר בבהירות רבה את סיפורו של החישוב, הכולל גם אינטגרלים ונגזרות. גם מורים ותלמידים אוהבים מצגת זו. וכעת, ניגש לנושא האחרון שטד עסק בו, אסתטיקה. הדואליות של תהליך הייצור הוזכרה לאחרונה, לעיתים קרובות, התמקדות המורה בהוראה היא התוצר. הניסיון לקרוא על כך תיגר ולהחזיר למורים את האמונה בחשיבות התהליך. קריאת קטעים היסטוריים במקור חשובה מאוד בתהליך ההתמקדות בדרך הלימוד. ושוב רעיון האסתטיקה- אסתטיקה באיזה מובן? אתן לכם את ההגדרה לפי אוקינס: אסתטיקה היא צורת התנהגות בה ההפרדה בין משמעויות ומטרות אינה חשובה. היא דורשת עוז רוח. אני חושבת שקריאת מקורות היסטוריים, לפי מה שהספור התכוון, חשובה בתהליך, ממש כמו התוצר של הלמידה עצמו. ישנו עניין ואימוץ דרך למידה זו ע"י חלק מהתלמידים. ההיסטוריה מאתגרת את דמיונם של המורים במציאת דרכי הוראה חדשות. תודה.

עד שהמצגת תעלה. דיברתי על ההיסטוריה של הכלכלה, דיברתי על ריקרדו ומלתוס. הם היו חברים טובים ובילו חלק ניכר מחייהם בוויכוח. היסטוריון תיאר אותם פעם כמי שנמצאים בגן עדן, עדיין אוהבים זה את זה ועדיין מתווכחים בלהט. מה שברצוני לעשות, במקום לענות על השאלה האם היסטוריה היא טובה או רעה לתלמידים או למורים למתמט', וברצוני לציין כי אני חושב שזה טוב, אנשים פקפקו בכך, אך עדיין זה טוב לדעתי. ברצוני התמקד על כיצד התפיסות והאמונות הקודמות שלנו לגבי מתמט' וההיסטוריה של המתמט' קובעות את טיב היחסים בין 4 קהילות הנוגעות בחינוך מתמטי. מתמטיקאים, היסטוריונים למתמט', מורים למתמט', וחוקרים בחינוך מתמטי. ברצוני להציע, כי בסופו של דבר, חינוך מתמטי, בכלליותו, מצא עצמו בדרך כלשהי במרכז העניין של 4 קהילות אלו. וחינוך מתמטי, למרות שהוא עצמו מושפע מאוד מריבוע עניין זה, הוא בעל תפקיד חשוב ביצירת נק' מבט של חינוך מתמטי כשלם ועומד בפני עצמו. ברשותה של רוזה, אחשיב עיכוב זה כחלק מ10 הדק' שלי (עיכוב וצחוק...). הבעיה של המתמט', של ההיסטוריה של המתמט', בחינוך המתמטי, בו אני כולל הוראה מחקר, למעשה משקפת את הבעיה של המתמט' בחינוך המתמטי. הקשר בין המתמט' וההיסטוריה של המתמט' עצמה מספק אף הוא מראה דומה. ונחזור להיסטוריה של המתמט' מול מתמט': כאן ניתן לראות את התפיסות הקודמות בשני התחומים. כאן ההיסטוריה של המתמט' מנסה לראות במה הייתה שונה המתמט' בעבר מהמתמט' של היום. עליה להתייחס למתמט' כתוצר של התרבות בסביבה, כפי שג'ודית גרדנר אמרה, שהיא תלוית תקופה. מנק' מבט היסטורית, המתמט' מתנגדת לעמדה של המתמטיקאים המודרניים הקובעים מה נכון ולא נכון למתמטיקה בימי קדומים יותר. המחנכים למתמט', ואני מתכוון בעיקר למורים, מעט תקועים בדרכם. כדי להדגיש כי המורים נוהגים לפי התרבות, והם נוהגים לפי הנהוג בקהיליית המורים בכל תקופה, וכי הם רואים רעיונות מתמטיים כסופיים ובלתי ניתנים לשינוי- לעיתים זוהי השקפת עבודתם של המורים בהכרח, שמכינים תלמידים לעבודה במתמטיקה ובמדע מודרני, ורק לאחר מכן התלמידים מתוודעים לגמישות ולגנריות של המתמטיקה. אז מצאנו מע' מתיחויות פה- בין מתמט' והיסטוריה של מתמט', ומתמט' ולימוד מתמט'. שימו לב כי צבעתי במצגת בצבעים שונים שני דברי אלו. קו זה הוא באותו צבע, כי במובן מסוים, חינוך מתמטי בין שניים אלו, וזוהי הנק' הבאה שלי – ישנה חוסר סימטריה כאן, כי מתמט', מתמטיקאים והיסטוריונים של מתמט', ברצוני להדגיש- בכלליותם ולא כאינדיווידואלים- הם מאוד עקשנים בדעותיהם, אך המחנכים למתמט' חייבים להיות גמישים במידת מה בדעותיהם, יום אחד הם חושבים כך ויום שני אחרת. מורים למתמט' אינם עקביים לחלוטין בדעותיהם, וכך ניתן לראות את המתח בין הקהילות משתקף בצורת לימוד המתמט'. ישנו קוטב רביעי, זהו המחקר בחינוך מתמטי, בציור הזה שמתי אותו בציר המאונך. החוקרים הללו מתנשאים במובן מסוים על היסטוריונים למתמט' ומתמטיקאים. הם נקרעים בין 2 מחויבויות. החינוך המתמטי מקבל תפקיד בהגדרת השקפת עולמו, השקפה זו יכולה להתאים גם למתמטיקה של אותה תקופה. מחנכים למתמט' ממלאים תפקיד גדול במובן זה, ע"י הגדרתם למהו חינוך מתמטי, וכך הם מגשרים על הפערים בין הקהילות במובן מסוים. תפקיד זה ממקם אותם באמצע הדרך בין מתמט' והיסטוריה של המתמט'. כך פתאום הפכתי את מע' הצירים, שמתי את המחנכים למתמט' בראש הציר המאונך והפכתי את השאר למטה. מי שקרא מאמרים שכתבתי בעבר, בהם דיברתי על הדילמה בין הוראת מתמט' ו2 קטבים אלו, להשכלה של את התפקיד התיווך בין הקולות השונים. תפקיד הגישור, אם המחנכים יאמצו אותו, מעלה שאלות עם אופי תיאורטי ומעשי. אז מס' שאלות תיאורטיות לגבי חינוך מתמטי- אילו טענות פילוסופיות התומכות בטענות המתמטיות מרומזות בהכנסת היסטוריה של מתמט' לחינוך המתמטי? כאשר מביאים היסטוריה מתמטית, ולא רק כדי להכניס קצת עניין לשיעור, אם ניקח שאלות פילוסופיות אלו, האם זה לא ייצור ריחוק בין מתמט' לחינוך מתמטי? למשל, אם נחליש את הטיעונים, שמתמט' מודרנית מבינה את המתמט' בימים עברו ובידיה המפתח גם להיסטוריה של המתמט'. האם חינוך מתמטי יכול לשמש בהקשר פילוסופי בדיון בין מתמטיקאים והיסטוריונים למתמט'? האם יכולה לצאת משניהם אמירה דומה, מעין כמו הסיטואציה המפורסמת בעבודתו של לוקוטוש, על הדיון בהוכחות. ברמה המעשית, או לפחות בדברים שיש בהם צד מעשי, של הבאת ההיסטוריה של המתמט' לחינוך המתמטי, באופן כזה שגם מתמט' וגם ההיסטוריה של המתמט', בייחוד ע"י הבאת טקסטים מקוריים, כפי שניל ציין קודם, באמת נותנת נק' מבטים על היסודות, על הגיאומטריה. ממצאים שמצאתי מעבודתי עם תלמידים, לא תמיד ברור כיצד להכיר להם טקסט מקורי, וגישה אחת שניל דיבר עליה היא קצת מופשטת. אך ישנה בעייתיות בה , של כיצד נוכל להיות בטוחים, שכשאר נציג עצמינו כפרשנים מודרניים של הטקסט, שלא נציג אותו בצורה מיושנת? אלו הם שני היבטים שאני חושב שיש בהם צד מעשי. זהו. תודה.

מייקל תמיד דאג שאפול בין הכיסאות. בסופו של דבר, כמעט נפלתי בין הכיסאות בגלל עמיתי הקנדי! (צחוק). פאנל זה התמקד בהיסטוריה של המתמט' בחינוך, בעקבות רעיונו של ניל על האפשרות להשתמש בטקסטים היסטוריים בשיעורי המתמט', הוא לא כתב זאת אך אני חושבת שזה היה ברור בהערותיו, שזה יפתח תובנות מתמטיות והבנת התפקיד המתמט' בחברה וגם יעורר את תפיסת הממד של המתמט' בפני עצמה. אשתמש ב3 מטרות אלו כחלק מעמדתי בוויכוח זה. ברצוני לתרום לדיון זה בהתייחסות לעבודתם של אייזנברג ודרייפוס משנת 1986, לגבי האסתטיקה בחשיבה מתמטית, עבודה זו השפיעה עלי מאוד. מרגש אותי מאוד להיות כאן, שכן מעולם לא נכחתי בכנס של חינוך מתמטי בו השתמשו במילה "אסתטיקה" לעיתים תכופות כ"כ. לאלו מכם שלא מכירים עבודה זו, אסכם אותה בקצרה: דרייפוס ואייזנברג טענו שאסתטיקה לוקחת חלק משמעותי בפעילות המתמטית, בפתירת בעיות, ולא רק במובן של מציאת הוכחה, אלא גם בהנחיית מתמטיקאים בתהליך פתירת בעיות, וגם בנטייתם לבחור בעיות מסוימות על פני אחרות. הם הראו גם שמתמטיקאים מומחים רגישים יותר לערכים אסתטיים, מאשר מתמטיקאים פחות מקצועיים. הם הציעו כי מתן תשומת לב לאסתטיקה בשיעורים בביה"ס יכול לשפר את יכולותיהם של תלמידים בפתרון בעיות. דבר שכדאי לשים לב אליו כמחנכים, הוא שלא קל לעורר את תשומת לב התלמידים לאסתטיקה שבמתמט', וגם שלתלמידים אין בהכרח את אותה רגישות לערכים אסתטיים כמו למתמטיקאים מומחים. כמובן ששיפוט אסתטי אינו מושפע רק אינדיווידואלית אלא גם מגורמים תרבותיים. כונה העובדה שהיחס לסימטריות וכו' כאסתטית חוזר ונשנה בהיסטוריה, אך אלו הם תיאורים נרחבים, שאינם עוסקים רק במתמט' ממילא. ישנן דוג' רבות בהיסטוריה של המתמט' בהן גם כאוס וחוסר סימטריה נתפסו כערכים אסתטיים. דרך אחת להסתכל על ההצעה ההיסטורית, פרויקט שהוצע ע"י נילס, היא להתמקד לא רק על השינויים בתוכן המתמטי, אלא גם בשינויים בערכים האסתטיים שבתוכנית הלימוד. ערכים אלו הופכים לראיות כאשר בוחנים, למשל, על הפעילויות הדומיננטיות של ימינו, כאשר אנשים עוסקים בשאלות בסיסיות ופתירת בעיות פתוחות. הם הופכות לראיות גם כאשר חושבים על הטכניקות שמשמשות לפתירת הבעיות הללו. האם הן אלגבריות, גיאומטריות, ניסיוניות או ממוחשבות? לבסוף, הן נעשות חשובות בבחירת השאלות והטכניקות בהן נעסוק על פני בעיות וטכניקות אחרות אופציונליות. בחירות אלו נעשות בד"כ כי הבעיות והטכניקות הן הכי יפות, הכי אקטואליות, הכי נכונות, ובמילים אחרות, הבחירות ההיסטוריות של הבעיות יכולות לרמז לנו מה היו הערכים של אותה תקופה מה היה רלוונטי דאז ומדוע. עד כה הסברתי מדוע הצעתו של ניל צריכה ויכולה לכלול שיקולים אסתטיים. כעת ארצה לעסוק באילו ערכים הוא בחר להתמקד בטקסט ההיסטורי. מנק' מבט אסתטית, ניתן ללמוד הרבה על מתמט' ועל המתמטיקאים מקריאת קטע היסטורי. ניתן להתמקד, למשל, על סגנון הכתיבה, שהשתנה רבות במהלך ההיסטוריה של המתמט'. לדוג', סגנון הכתב ההומוריסטי כולל הפתעות נרטיביות, מורכבות ואווירת קרנבל. בהחלט לא הטקסט המתמטי הרגיל. זה מעורר ערכים אסתטיים שונים, למשל, כיצד קומיקאים כותבים מתמט' כדי לענג ולתת השראה? לאוקלידיוס היו מטרות אחרות. ברור כי דברים אלו קשורים לתפקידה של המתמט' בחברה. לבדר, להיות שימושית, ללמד, היא נותנת לנו גם כי מושג הסובייקטיביות אינו רק מונח אלא משרת ערך אסתטי. אני חושבת כי לטקסט היסטורי צריך וכדאי שיהיה רכיב אסתטי. כעת אעלה שאלות באשר לגבול הקשר זה, עדיין בתחום האסתטי: נדון ב3 נק'. הראשונה מתייחסת להבדלתו של ההיסטוריון ליאון קוריון בין הגוף והדימויים של מתמט'. בניגוד לגוף המתמט', שכולל שאלות הקשורות ישירות לנושא בכל תחום מתמטי, תיאוריות, הוכחות, טכניקות, שאלות פתוחות, ולעומת זאת הדימויים של המתמט' נותנים מקום לשאלות הנובעות מגוף המתמט', אך בשל אופיין הן אינן יכולות להיחשב כחלק מגוף המתמט'. לכן, גוף המתמט' יכול לתאר טכניקה המשמשת במהלך הפתרון, הדימויים המתמטיים יתייחסו למוטיבציה ולערכים המיוחסים לשימוש בטכניקה זו. כאשר הגוף יגדיר אובייקטים, הדימויים ישאלו אילו אובייקטים ניתנים להגדרה ואילו לא, מתי ומדוע. בד"כ מתמטיקאים לא כותבים על הדימויים שלהם, אך הדימויים מכתיבים את הדרגות בידע המתמטי, ובסופו של דבר מערבים שיקולים אסתטיים. הם לא יתגלו רק בלימוד של טקסט היסטורי. ניתן ללמוד על התפתחות המתמטיקה כתוצאה מהשינוי בדימויים המתמטיים, על תפקידה של המתמט' בחברה שלנו, והממד הסובייקטיבי של המתמט'. אלו הם 3 הנושאים שניל לא ציין במפורש בעבודתו אך הם משתמעים ממנו. הנק' השנייה מתייחסת לסגנון הכתיבה. אילו סוגי טקסטים היסטוריים אנו עשויים לבחור עבור התלמידים? ניל כבר נתן לנו דוג' אחת. התייחסו למאפיינים הלשוניים של כתיבה מתמטית מודרנית. השימוש בפעלים לא אקטיביים, הנמען המעורפל וכו'. אלו נוטים להפוך את המבנה הלוגי של הטקסט. בכל מקרה, סולומון ואוניל אבחנו 2 סוגי ניגודיות בסגנון הכתיבה בטקסטים מתמטיים מהמאה ה18. וויליאם רונד המלטון, הם טענו שההבדל העיקרי בין 2 סוגי ניגודיות אלו הם הנרטיב והפירמידה, בדיוק בחיבור שבין המבנה הלוגי והמבנה הכרונולוגי. מבנה השטח, במונחים של פעלים, זמנים, מילות קישור וכו' מעניין מאוד בסגנון הכתיבה של המלטון, וסגנון זה משתנה כאשר הוא כותב יומן לעצמו, מכתב לחבר, או כאשר הוא כותב את מאמריו לעיתון "מונוגרף". אני מניחה שזה נכתב גם לחבריו ועמיתיו. בכל סגנונות הכתיבה האלו, הדפוס והמקצב הם נושאים ראשיים, וכאשר אנו בוחרים קטע קריאה עבור תלמידינו, אנו עשויים לשאול איזה סגנון כתיבה יהיה עדיף לשימוש בכיתה. האם קטעי היומן יתאימו יותר להבנת דימויים מתמטיים? האם המעבר בין היומן לכתיבה המקצועית יהוו לנו חלון הצצה לדרך בה מתמטיקאים מחפשים את האמת הפנימית והמקצועית שלהם וכיצד הם מתמודדים עם הרגשות והספקות שלהם. מאחר וטקסטים אלו אינם נק' הסיום של מחקר מתמטי, גם של פתרון הבעיות וגם של תהליך הכתיבה, קטעי קריאה אלו נותנים תחושה מוגבלת בלבד של פעילות מתמטית. הם נכשלו במתן הבנה מקיפה של כיצד מגיעים לתגלית מתמטית. עוד עניין הוא הטכנולוגיה של המילה הכתובה, הדפוס. כפי שבראיין רודמן טען, זהו העתק של המילה שהודפסה פעם אחת ומאז שוכפלה שוב ושוב. זהו סגנון כתיבה נפרד שמשקף פיסת תרבות. מעניין לתאר לעצמינו חלופות לטקסט, בתור פרויקט היסטורי שהציע ניל. לדוג', ניתן לחקור את ביצועיו של ארכימדס, שצייר את שרטוטיו בחול. ננוע קדימה ואחורה בין דיאגרמות, סימבולים ומילה דבורה. או נצפה בקטע יו-טיוב של טרנס טל. תפיסת הסובייקטיביות תהיה בלתי נמנעת. מתמט' תהיה פעילות זמנית, בעידן הדיגיטלי שלנו, לא זאת שהתקשורת שלנו מקיפה יותר תחומים בחיינו, גם היכולת לתמרן בזמן תשנה את מהלך המתמט'. אני תוהה כיצד שיעורי המתמט' סביב טקסטים היסטוריים יתמודדו עם האפקט של לימוד יסודות המתמט' כחלק מדרכי התקשורת היומיומיים. הנק' השלישית שלי נוגעת לסמכותה של המילה הכתובה. זה צמח מהרעיון שהיסטוריון ופילוסוף למתמט', ז'יל שאטולה, שהתעניין בנושא הגוף והדימויים של מתמט', הוא למד מס' מקרים כאלו בהיסטוריה של המתמט', למשל- המקרה של המילטון, תיאוריית גספמן על התארכות, והתיאוריה של קושי. הוא למד דוג' אלו ע"י ניתוח הדיאגרמות שהמתמטיקאים הללו השתמשו בהם כדי ליצור אובייקטים ויחסים מתמטיים חדשים. עבור שאטולה, הדיאגרמה מדגימה את יכולת התנועה של הגוף. הוא עסק בניסיון וגילוי כיצד להבין את כל העקרונות הללו בציור פשוט. הניתוח שלו באפיזודות היסטוריות אלו הוא ניתוח של שני מקורות אלו של משמעות מתמטית. הם תומכים זה בזה וחולקים תנועתיות ופוטנציאל זהה. הדיאגרמה ושאר הייצוגים מעידים על הקשר בין האדם המבצע את החישוב המתמטי לבין העולם החומרי. עבור שאטולה, לימוד הטקסט המתמטי אינו רק הטמעה אפיסטימולוגית, אלא גם אונטולוגית. הנק' והקווים בדיאגרמה אינם מייצגים רק חשיבה על אובייקטים ומרחבים מתמטיים- הם עצמם המרחבים והאובייקטים המתמטיים הללו. הם נעים, מתארכים, נקטעים, נפגשים. למרות שהמחקר שלו היה היסטורי, שאטולה היה פילוסוף- הוא איתגר את התפיסות המתמטיות, התעקש על החומריות, חיפש את הפער שאריסטוטלוס פתח בין המתמט' המופשטת והפיזיקה הגשמית. במונחים של הפאנל הזה, ובמונחיו של ניל, שאלות רבות צפות ועולות. ברמה הכללית, לימוד טקסטים מתעלם מחלק חשוב של אבחון וסיווג מתמט'. ברמה פרטנית יותר, לימוד טקסטים כולל גם את סגנונו של שאטולה בלימוד דיאגרמות, לא רק במובניו הפילוסופיים אלא גם בגילוי המשמעויות החבויות שמאחורי אובייקטים מתמטיים. תודה.

תודה רבה, נטלי. כעת נפתח את הבמה לשאלות מהקהל, אנא אמרו את שמכם לפני שתשאלו.

איזי וייצמן, משיקגו. ברצוני לחתור תחת מה שנאמר כאן מס' פעמים. אקרא לזה ארכיאולוגיה ולא היסטוריה. לדוג', רעיון ההסתגלות, שהתחיל בתור פונקציות של משתנים אמתיים, עבר ליכולת ההשתנה של פונ' רבות משתנים, אח"כ למטריצות, ולמרחבים כללים. השאלה, אם כך, כיצד תקבעו את הגדרת ההסתגלות ואילו תיאוריות נכונות עבור פונקציות במובן ההסתגלות? כיצד אתם משנים את הגדרותיכם תו"כ התקדמות? זה משהו שקורה לעיתים נדירות, אך יש לו חשיבות בדרך בה אנו מלמדים מתמט'.

מייקל פריד: במובן מסוים, מה שאתה אומר הוא בדיוק מה שאנו עושים בהיסטוריה של המתמט'. להבין כיצד הטבע של האובייקט המתמטי משנה את משמעותו. במובן מסוים, זה הרעיון המרכזי בהיסטוריה של המתמט'. להבין את הטבע המשנה של אובייקט מתמטי. ניתן לומר שזה משנה גם הגדרה.

שם לא ברור, לורנס: רציתי להוסיף הערה שתגשר בין הערתך לבין מה שנילס אמר. אדבר מעט גם על מה שנטלי אמרה. נילס הציע דרך אחת להביא היסטוריה ללימוד המתמט'. ישנן דרכים אחרות לעשות זאת. ולגבי הצעתך על הדימויים, ניתן לקחת מס' טקסטים ולא רק אחד שינותח לעומק, וכך לראות את הניגודיות ולעבדה. זוהי דרך שלעיתים אנשים משתמשים בה.

פול גולדנברג: יש לי שאלה. היא נוגעת לכיצד להתמודד עם אחד ממורי לשעבר ששאל תמיד "מדוע אתה רוצה לעשות זאת? מהי מטרתך?" חשבתי שבמקרה של ההיסטוריה של המתמט', אחד הדברים שהיא עושה הוא להוסיף סיפור עלילתי לנניח, 13 טקסטים במתמט', שבד"כ לא יכללו ציר עלילתי כלל. תאר לעצמך רומן עם כל המאורעות שבו, מסודרים לפי סדר אנאלפביתי. הרי אין זה סיפור בכלל. ישנם הרבה צירי עלילה שניתן להוסיף, זה יכול להיות התפתחות היסטורית של רעיונות, יישומי מתמט' לאורך השנים, השלכות של הדיסיפלינות לאורך השנים. מה יהיה מעניין במיוחד? מהי מטרת ציר העלילה כאן?

מנחה- האם מישהו בקהל מעוניין להתמודד עם השאלות?

נטלי סינקליר- אני רק רוצה להגיב במילותיו של ניל שהזכרתי בראשית דברי: ה"מדוע" לפיתוח משמעות ופיתוח מתמט', פיתוח הבנת העולם והחברה, מעודד את תפיסת הפרט לממד המתמטי. אינכם אוהבים את ה"מדוע"?

מייקל פריד- אני סבור כי זוהי שאלה חשובה. הרבה מטיעוני מבוססים על ההנחות הללו שאנו רוצים לעשות. למעשה, לומר כי אינני הולך לשאול שאלה זו, זה לא בגלל שהשאלה אינה חשובה, נכון? ניסיתי להעלות את הנק' בה החלטנו לעסוק בהיסטוריה של המתמט', ואז השאלה היא מה משמעות הדבר, במונחים של חינוך מתמטי. לכן, השאלה "מדוע" היא מאוד חשובה, ובמובנים רבים זוהי שאלת ההיסטוריה, אם יותר לי, אספר סיפור קצר. זהו סיפור אמתי. אני עובד בצד השני של הקמפוס, הצד המערבי, ליד מגרש החניה, ישבתי ועשיתי איזושהי עבודה, ופתאום שמעתי קול מוזר: פינג, פינג, פינג... תהיתי מה מתרחש מחוץ לחלוני, שמעתי בעבר מכוניות צופרות, אזעקת מכונית, נביחות כלבים, אך לא הצלחתי להבין מהו ה"פינג" הזה. אז התבוננתי דרך החלון וראיתי וראיתי את ידידי, סטיב רוזן, הארכיאולוג, עם כיתתו, יושבים ומכינים כלי אבן. אז חשבתי- הנה אנחנו באוני' הגדולה והמודרנית הזו, ומה הסטודנטים לומדים? להכין כלי אבן. וזה מעלה איכשהו את השאלה- מהי חשיבותה של ההיסטוריה? מדוע זה חשוב להכין כלי אבן? אני חושב כי זו שאלה חשובה. מה ששאלת הוא מדוע כל ההיסטוריה חשובה, ישנן תשובות רבות. תשובה אחת שאני נוטה אליה היא של קולינווד, ההיסטוריון הגדול. מה שאנו באמת עושים בהיסטוריה הוא מעין ידיעה עצמית של ההכרה. זהו ציטוטו. בדרך עמוקה ביותר, ע"י למידה על כיצד פעילות אנושית מסוג זה אכן קרתה. האם יש משהו עמוק בלהיות בן אנוש? איני בטוח כי זה מה שיעשה אותנו בוודאות מתמטיקאים טובים יותר. למעשה, בראיין טול, שהיה תומך נלהב בהיסטוריה של המתמט', אמר שאין זה בהכרח יעשה אותך פותר בעיות מוצלח יותר, אני יכול אפילו לחשוב על מקרים בהם למדתי ממתמט' והשלכתי זאת על היסטוריה, אך איני בטוח שזהו הצידוק לכך. זו חייבת להיות למידה על צורות החיים שלמדו לחשב מתמטיקה. וזה צריך להיעשות בצורה היסטורית.

קהל- רציתי להעיר על תשובתי שלי, לשאלתך. ברנרד מפריז. שכחתי לציין כי אני גם מאמן מורים. לכן עלי לענות על שאלה כזו מהמורים, מדוע נילס הציע שאנו נקרא טקסטים כאלו? ישנן תשובות אפשרויות רבות, חלקן כבר נאמרו. ישנה תשובה מאוד פשוטה שאני חושב כי היא חשובה, היא שמתמטיקאים ומורים למדעים אמורים להבין את התפקיד גם כפיתוח יכולתם של התלמידים לפענח טקסט. זה חלק מתפקידם. הם לא אמורים רק ללמד מתמט' או מדעים, הם אמורים לתרום משהו גם לתרבות הכללית בחינוך. בצרפת זהו חלק מתוכנית הלימודים, אחת המטלות של המורים היא לפתח את יכולת התלמידים לפענח טקסט ולבנות טיעונים. מה שברצוני לומר, הוא שאם תעשה דברים כאלו עם תלמידיך, זה ישפר מאוד את יכולותיהם. כמובן שישנן סיבות נוספות. אך זו לדעתי אחת המהותיות.

פיליפ זאבה, ג'נבה: אני המשתתף הכמעט אחרון. לימדתי מתמט' ופיזיקה במסגרת החינוך המתמטי, לא תלמידים העתידים ללמוד מדעים באוני', לא אפילו עמיתים שעתידים ללמד מתמט' ופיזיקה, אלא תלמידי תיכון שרובם לא ילמדו מדעים, פיזיקה או מתמט' באוני'. אני סבור כי זוהי המשימה הקשה ביותר בלימוד מדעים. אני מדבר על פיזיקה משום, וזה רק עבור נילס, שדיבר על פיזיקה, לא מזמן אתן רק 2 דוג' לכך שפיזיקאים עושים כל דבר העולה על רוחם ובלתי תלויים לחלוטין. כל עוד זה עובד, אם זה לא עובד- כולם שוכחים את עבודתם. אם זה עובד, זה נהדר. הדוג' הראשונה נוגעת לתלמידי תיכון ברמה נמוכה, והשנייה- רק אזכיר אותה, היא במכניקת קוואנטים, בה הציגו את פונקציית דלתא, שאינה באמת פונקציה, כפי שכולם יודעים, ומס' שנים מאוחר יותר, שוורץ פירט את התפוצה, שניסחה ובנתה אקסיומות ומאוחר יותר גם הגדירה מהי פיזיקת קוואנטים. ואני כאן עכשיו, ואגש לדוג' הראשונה: גלילאו גליליי. עבודתו במה שאנו מכנים כיום מהירות והאצה, במקרה מאוד מיוחד, שאנו מכנים רקטיליניאריות, תאוצה אחידה, איני יודע אם תרגמתי זאת נכון לאנגלית, ישנה נוסחה בה הוא השתמש בתחילת המאה ה17, תיאוריה אותה פירט מרתון קולידג' במאה ה16, כלומר, מאה שנה לפני ניוטון ולייבניץ הוכיחו אותה, הטקסט- וזוהי חלקה של ההיסטוריה, הוא מאוד מעניין, סגנון הכתיבה מאוד קשה לקריאה (וזה בשבילך, נטלי) ולהבין למה התכוון גליליי כאשר אמר משהו ביחס לכמות מסוימת וכו'. זהו גם מקרה להראות לתלמידים כיצד סימון מודרני, בו אנו משתמשים, הוא הרבה יותר ברור מעבודתו של גלילאו, וזה מעניין מאוד. תודה.

זלמן יוסיסקין: חשיבותו של הפאנל הזה, והוא אכן חשוב מאוד, לדעתי היסטוריה היא תמיד דבר מועיל ללמידה, כי היא מספרת לתלמידים שהמתמטיקה הומצאה ולא רק מחכה שיגלו אותה, היא משתנה בהימלך הזמן, והמשמעויות והשימושים אינם זהים בכל התרבויות. ברנרד אמר משהו שאינו נכון בארה"ב. ההיסטוריה של תכנית הלימודים. יש לנו עקרונות מנחים בארה"ב שאינם כוללים היסטוריה, אין בה כלום על המצאת המתמט', היא יכולה להיות מוצדקת, כי העקרונות המנחים נכתבו עבור מטרות הערכה ומבחנים, אפילו אם תופיע היסטוריה בספרי הלימוד של המתמט', המורים לא ישאלו לגביה, ומבחני הכניסה לקולג' לעולם לא יבדקו האם התלמיד יודע משהו על ההיסטוריה של המתמט'. חשתי כי הדיאגרמה של מייקל מפשיטה יתר על המידה את הסיטואציה המדוברת, וכבר אינה אמינה ומשקפת את מורכבות מאזן הכוחות בחינוך המתמטי. לא רק בהיסטוריה- היה אפשר להחליף אותה בדיאגרמה, אולי במה שפול כרגע הציע, יישומי המתמט'. ונבדוק מהו מצב המתמט' ביישומים במקום בהיסטוריה. בכל הימים שאנו נמצאים בכנס זה, היה זה מעניין לראות כמה מעט דוג' ליישומי מתמט' הוצגו, כאילו המתמט' היא מתמט' טהורה בלבד, ולדעתי חשוב שנבין, כי לפחות בתחום החינוך המתמטי, עלינו ללמד תלמידים גם על יישומי המתמט'. ולבסוף, אם מורים למתמט' צריכים להכיר את ההיסטוריה של המתמט', ואני אכן חושב שהם צריכים, אני חושב כי המתמטיקאים צריכים להכיר את ההיסטוריה של החינוך המתמטי. לחינוך המתמטי יש אכן היסטוריה ארוכה, היא שונה במערב ובמזרח, במערב היא מתחילה מקריק, במזרח היא מתחילה מהמתמט' הסינית, שעסקה בבעיות מאשר בדדוקציה, אני מניח כי אם היינו חוזרים אחורה, עוד לפני תקופת הזוהר של היוונים... אני מאמין כי ההיסטוריה, אפילו הלא רחוקה, של החינוך המתמטי, עשויה להועיל למתמטיקאים. אני יודע זאת כיוון שאנשים בארה"ב חוזרים על טעויות העבר.

(תגובה מהקהל) עלי לומר להגנתי, שאמרתי 4 קהילות, ולא ארבעת הקהילות. וכן, כל דיאגרמה כמו זו היא אכן פישוט יתר. מה שניסיתי להדגיש הוא איך לקהילות שונות יש תפיסות ומחויבויות שונות, לגבי כיצד יש לשלב את ההיסטוריה של המתמט' בחינוך המתמטי, ועלינו להביא זאת בחשבון במאזן הכוחות. אם תבקר את הריק של המתמט', יש בכך משהו. במקור כתבתי שם חינוך מתמטי, אך לאחר דיון עם אלאן ונורמה מחקתי זאת. אני חושב כי אפילו ביישומי מתמט' ישנה תפיסה מקדימה שאנו עושים משהו אמתי. משהו שלא היה שונה מבעבר או ממקום אחר. זו הנחה שעליך לעשות כאשר אתה עוסק במתמט'. דרך אגב, זו הסיבה שהדגשתי זאת כסוג ולא כמתמטיקאים שמתבוננים על הכול מלמעלה.

(ייתכן שפיליפ) רציתי להגיב ל2 נק' שאמרת, זלמן. הראשונה על הדברים העצובים באמת שציינת, ועלי להודות כי לא בדקתי את דברי בכל ארץ וארץ, אמרתי מה שנכון לגבי צרפת לגבי הדרישות בתוכנית הלימודים. עלי לומר שזה עצוב שהדרישה הזו מהמורים (ללמד איך לנתח טקסט) אינה נכללת בתוכנית הלימוד, כי זה חשוב מאוד. יש כאן מאבק שיש להתמיד בו. רציתי להעיר הערה היסטורית ועוד דבר לגבי קריאת היסטוריה בחינוך המתמטי במהלך אימון מורים. אני מסכים לחלוטין עם הצעות אלו ואני מיישם אותן. למעשה, בצרפת לפחות, אחד הראשונים שפיתח אימון למורים בביה"ס התיכון היה הסוציולג אמיל יורקנד. הקורס שלו התפרסם בעולם החינוך בגדול, בהתחלה הוא התקבל כמשלים להוראה. הוא סבר כי מורים לעתיד חייבים להכיר את האבולוציה של החינוך ומבנהו. לפי הפרק הראשון של יורקנד, בו הוא נותן סיבות למדוע זה כ"כ חשוב, והוא כתוב היטב.

עוד מישהו מהקהל: דבר נוסף שרציתי לומר לגבי ההיסטוריה בתוכנית הלימוד האמריקאית, ראשית ישנם סטנדרטים שאומרים שצריכים ללמד רכיבי תרבות. דבר שני, היא שבחינוך המתמטי האמריקאי המסורתי יש לנו דמויות כמו די. סמית וכדרורי, או כבר בסוף המאה ה19 ותחילת המאה ה20, היה לחץ גדול על הכנסת ההיסטוריה של המתמט' לחינוך המתמטי. די. סמית התעקש, בתרגול למורים, שהם יכירו את ההיסטוריה של המתמט'. כדרורי, הידוע כהיסטוריון למתמט', התחיל לחשוב על השאלות הללו כמורה תחילה, ורק אח"כ החל לחשוב עליהן ברצינות בהיסטוריה של המתמט'. וזוהי סוף המאה ה19. אז יש לנו מסורת כזו, למרות שכחנו אותה, כפי שאמרת.

פוליה פוליגה, מורה, ג'נובה: התלוננתי כי בארה"ב אין הם מעוניינים בהיסטוריה. המגזין לחינוך מתמטי מעולם לא פרסם מאמר על היסטוריה ככלי חשוב להוראה. זה עצוב מאוד כי זוהי אוריינטציה המשותפת לכל העולם בתחום תכנית הלימוד, וזה לא קורה רק בארה"ב. איטליה בתוכנית הלימוד הרשמית שלה כללה היסטוריה, אך אין תכנית מסודרת ללימוד מורים היסטוריה של המתמט'. אז ישנו מעין ניגוד. כעת הדברים משתנים, יש קורסים באוני' לצורך כך, אך עדיין ישנו ניגוד. לומדים היסטוריה, אך לא מלמדים היסטוריה מהי.

נטלי- רק דבר אחד. ג'רמי אכן פרסם משהו על היסטוריה. פוליה- כן, נכון, אך זה מאורע נדיר.

מנחה- לפני שנמשיך, ברצוני לשאול את נילס האם הוא רוצה לומר משהו, כי אתה חבר הפאנל.

נילס יאנג, אני' דיספוקאסן (?)- ברצוני לחזור לשאלה "מדוע", ראשית אני מסרב ללכת לרמה אחרת של נימוק, כי כל אחת יכול לתת מטרות כאלו, ולהגדירן מחדש, וכמובן לעשות זאת טוב יותר ממה שכתבתי בצורה מופשטת, אך יש להודות כי אין צידוקים נוספים לכך, במובן מסוים, אנו בהיסטוריה של המתמט' נמצאים בתחרות עם תחומים אחרים. לדעתי עלינו להסכים לפחות על כך שאיננו רוצים לחנך מתמטיקאים שאין להם דימוי אחר של מתמט' טהורה. אני חושב שחייבת להיות הסכמה כלשהי, ואם זה המקרה, תכנית הלימוד בביה"ס צריכה לכלול היסטוריה, יישומים, פיסיקה וכו'. בארצי זה נעלם לחלוטין, אך כאשר הייתי תלמיד זה היה נפוץ. ישנן שיטות לימוד מתחרות. בגרמניה אנו מתוודעים לכך בתואר השני. ירשנו זאת מארה"ב ומדינות אחרות, יש לנו את תהליך קולומביה הזה, ובתואר השני ישנו רכיב מסוים שיש בו את האות E. E מסמן משהו כמו הרחבה\הארכה, זה אומר שעליך לתת קרדיט לשיטות לימוד הקשורות לאספקטים שונים במדע. יש אנשים במחלקה שלי שחושבים שיש לזה תפוצה רבה. אין טיעון אמתי כי זהו תיאור מראש. אני חושב כי אנו באמת זקוקים לדיון הזה כי הוא לא יכול להיות יותר מדוקדק, הטענות הן בעלות אופי שונה מאשר במתמט'. ולבסוף אזכיר לכם כי אינני מכיר מתמטיקאי חשוב בהיסטוריה שלא היה מודע להיבטים שונים במדע, אני זוכר אחד משתי הדמויות המובילות בין סוף המאה ה19 ותחילת ה20, הילברט ופואנקארי, זה לא היה רק בתקופה העצלה שלהם, הם כתבו על היבטים אפיסטימולגיים והיסטוריים שהחשיבו כחלק מהמאמץ המקצועי. עבור פואנקארי היה זה ברור שהכרכים החשובים שכתב ביחס למצב, ועבור הילברט, נעשה ברור יותר ויותר, ערכתי חלק משיעוריו כאן, לגבי הקשר בין מתמט' ומדעי הטבע. אלו הם שיעורים בעלי אופי מאוד אפיסטימולוגי. היה זה חלק נכבד מאוד מחשיבתם. מתמטיקאי טוב מכיר היסטוריה של המתמט' ושל החינוך המתמטי.

אבי ברמן, טכניון: אני מנסה ככל האפשר לכלול בכיתות בהן אני מלמד מתמטיקאים תיאורטיים והיסטוריה, אך היסטוריה היא היסטוריה, והתשובה ל"מדוע" היא ברורה- אני רוצה שהתלמידים ידעו שמתמטיקאים הם בני אדם. זלמן התייחס לבחינת תלמידים על היסטוריה של מתמט', אז רציתי לחלוק עמכם אנקדוטה, פעם כללתי במבחן באלגברה ליניארית שאלת בונוס עם 2 חלקים: הראשונה- היכן קבורה אשור? השנייה- באיזה כלי בנו של אוטו טפליץ ניגן? הסיפור מאחורי שאלות אלו מעניין למדי אך לא אכנס אליו. התשובה להיכן קבורה אשור היא בבית קברות בת"א, זה מאוד מעניין מבחינה היסטורית. בנו של אוטו טפליץ היה הנגן הראשי בחליל בפילהרמונית הישראלית. מה שקרה הוא שעשר שנים לאחר מכן תלמידים באו למשרדי ושאלו, כחלק מהכנותיהם למבחן, היכן קבורה אשור ועל מה ניגן בנו של אוטו טפליץ.

יואנה- יוון. חשבתי שהפרדיגמה שנילס הציג היא מאוד מוצלחת ורציתי לדעת אם הלימוד ביחידה זו, לגבי התפיסה האוקלידית של טנזין הגיעה ממך או מתלמידיך. השאלה השנייה היא אם בטקסט של ברנולי עצמו (משהו לא ברור, רעשי רקע)-אני חושבת שהאינפיניטיסימליות של לייבניץ מיוחסת כמונארט, איני יודעת אם זה- מונארט ביוונית פירושו יחידה, האם זה תרם להגדרה הסופית של זה.

נילס- ביחס לשאלתך הראשונה על טנזין, לא התייחסתי למשמעות האוקלידית של טנזין ביח' לימוד זו. בפשטות, אמרתי לתלמידים שיש להם כעת דבר מה להתייחס אליו והם הציעו זאת. יש לי גרפים של תלמידי באוני', הם קוראים לזה כך והם השתמשו לראשונה במעגל אוקלידי, פרבולה וכך הגענו לררעיון זה לגבי לייבניץ. זוהי דוג' נפלאה למה שאמרת. בקשר לשאלה השנייה, ניתן לראות קשר בין מונארט ואינפיניטיסימליות, ייתכן, אך לא הייתי משר שקישור כזה נעשה בטקסט של לייבניץ. מה שמעניין כאן, ועשיתי זאת גם עם סטודנטים, הוא שהייתה חלופת מכתבים בין יוהן ברנולי ולייבניץ, לגבי קיום האינפיניטיסימליות במציאות. ברנולי נוטה לראות דברים בצורה מאוד ריאליסטית. הוא אמר שאין סיבה בגללה אלוהים לא יכול להמציא עולם הקטן באופן אינפי' מעולמינו, ועולם נוסף הקטן באופן אינפי' מעולם זה , וכן הלאה. הוא טען שיש לזה איכות אונטולוגית. הוא היה צעיר למדי בתקופה זו. (צחוק). לייבניץ היסס למדי לגבי זה. הייתה לו עמדה מודרנית יותר. הוא אמר שכמו מס' מרוכבים או שליליים, הם אובייקטים אידיאליים שתורמים להבנתנו של היחסים האמתיים, זהו הבדל תיאורטי. לייבניץ נתן לברנולי מכתבים אחרים, שמנק' מבט קפדנית הם מטורפים לחלוטין. זה כמו לומר שהארץ היא אינפי' קטנה יחסית ליקום. הוא ניסה לגרום לרבים לקבל את דעתו, הוא לא הקפיד מידי בדימויים שלו.

קהל- רציתי להדגיש את דברי מייקל ואיזי. הטנזין הוא דוגמא נהדרת כי כאשר חושבים על הדרך בה הרעיון של הטנזין החל, בימי ברנולי, מתחילים להבין שבעבר זה היה אובייקט. טנזי, תרתי משמע, היה ניתן למגע. לא תמצא בהגדרות אוקלידיות או אפולוניות את הטנזין. איפה דיויד טול? כאשר אני מדבר על דימוי מושגים, אני תמיד משתמש בדוג' של הטנזין, כי התלמידים תמיד סבורים שהם יודעים מהו טנזי, ואז מסתבר שהם לא יודעים . בכל אופן, בעולם העתיק, הטנזין היה מוחשי. כאשר יש לך תכונות בין טנזין לעיקול, זוהי תמיד תכונה שהולכת כך: ממקמים קו מאונך לקוטר שמשיק למעגל, אם תנסה למקם קו נוסף באמצע, הוא יחתוך את המעגל. למעשה, רעיונות רבים של האינפי' החלו במה יש לעשות בשטח בתחום המגע של הקווים. אז זוהי דוג' מושלמת לרעיון שלא רק הגדרתו השתנתה, אלא המודעות לכך שלא הייתה לזה הגדרה התחילה לצבור תאוצה בעולם המתמטי. זוהי דוג' טובה מאוד.

בוריס רואיצוק- בשאלתי אני רוצה להציג הבדל אפשרי בין השימוש בהיסטוריה של המתמט' למטרות חינוכיות, והשימוש במעשיות היסטוריות, שהן מעין אנקדוטות שאינן מבוססות בהכרח. שאלתי נובעת מספר שקראתי מאת רינה טטקין, זהו ספר המלמד מתמט' דרך סיפורים, בו היא נותנת דוג' לגאוס הצעיר בכיתתו. היא נותנת 4 תרחישים אפשריים בהם המורה יכול ליישם סיפור זה בכיתתו. גאוס הקטן סופר מס' בין 1 ל100, והמסר הוא לא להתמקד דווקא בנכונות ההיסטורית של הסיפור, אלא לחשוב על מטרותינו החינוכיות. שאלתי היא, והייתי שמח לשמוע את דעתכם בעניין, עד לאיזה גבול מורה למתמט' צריך לעסוק בנכונות היסטורית של הסיפורים בכיתה.

פוליה- איני בטוחה שאני המתאימה ביותר לענות על כך. זוהי השאלה האמתית, ולא במקרה הזכרתי חינוך מורים. ברצוני לחזור לשאלות אחרות. ראשית, מורה הבוחר להשתמש בהיסטוריה חייב לשכנע ולהכיר היסטוריה, עליו להיות גם חובב היסטוריה. לגבי הנק' השנייה, היא שלדעתי אכן מורה חייב להכיר מספיק היסטוריה כדי לא להפיץ בטעות אמונות שקריות ולהטעות את תלמידיו. איני מסכימה שלא חשוב שהמורה לא יכיר היסטוריה. עליהם לבחור בקפידה את סיפוריהם. זו הסיבה שאני מלמדת זאת מורים. מורים שמכירים את הבעייתיות שמאחורי המידע ההיסטורי.

אלאן ברנרד: אתייחס לשאלתך בנק' אחת, למה אנו מתכוונים כאשר אנו מדברים על ההיסטוריה של מתמט'? לא ניתן להגביל עצמנו רק להיסטוריה של המתמט' כפי ש(רעש). זה טוב גם שאם תשאל תלמידים דבר מה על היסטוריה הם ידעו לענות לך. אתה עשוי לומר בנק' מסוימת, וזוהי עמדתי, שזה לא מתכתב, למשל , ביחס למה שאנו יודעים על היסטוריה, אך איננו צריכים להשתמש בהיסטוריה מודרנית כדי להשמיץ מורשת היסטורית מתמטית זו. חשוב מאוד להרשות למורים להשתמש גם בכלים שאינם בהכרח תואמים לערכי היום-יום שלנו.

רוני קרסנטי, מכון וייצמן: שאלתי ממשיכה במובן מסוים את שאלתו של בוריס, כי היא גם מכילה פדגוגיה. היא נוגעת לטקסט היסטורי ותפקידו בכיתה. ניתן לטעון של מנת שתלמיד יוכל להתמודד עם טקסט היסטורי-מתמטי, עליו לדעת דברים לפני כן: ידע מתמטי מסוים, יכולות טיעון מסוימות. מצד שני, ניתן לטעון שקריאת הטקסט תקדם ותשפר כישורים וידע אלו. ברצוני לשאול את חברי הפאנל כיצד הם רואים את האינטראקציה בין הידע והיכולת לקרוא טקסט היסטורי, במיוחד אם הוא כמו מה שנטלי אמרה, כתוב בסגנון ברמה גבוהה מידי עבור התלמידים. כיצד אתם תופסים את תפקיד המורה כמתווך בין האינטראקציות?

אלאן ברנרד: לדעתי נילס כבר ענה לזה בנאומו.

פוליה: אני רק מעוניינת להוסיף אנקדוטה לגבי מורים המשתמשים בהיסטוריה: היה גינוי כלשהו נגד שימוש באריק בל, המתמטיקאי הדגול, אך בראיון אחרון, ווייז, שהוכיח את התיאוריה האחרונה של פרמה, אמר שהוא החליט לעסוק במתמט' רק בזכות המאמרים הפופולריים שפורסמו ע"י אריק בל. אז הדרכים להגיע להיסטוריה הן אינסופיות.

מנחה- אנו מתקרבים לסיום, לכן רק אוסיף הערה קטנה: אני חושב שאמרנו רעיון זה בצורה מפורשת. לדעתי, ההיסטוריה של המתמט', שמישהו אמר שהיא לא מופיעה בתוכנית הלימוד בארה"ב, מספקת לנו הזדמנות להכיר דעות שונות משלנו, ולהיות מודעים למשמעות, כמו בדוג' של נילס. להיות מודעים לכל הסגנונות המתמטיים. כך נוכל להבין יותר טוב מי אנו, כבני אדם מתורבתים. לדעתי ההיסטוריה של המתמט' מאפשרת לנו הזדמנות נדירה בה אנו חייבים לפגוש את הזרות אותה אנו מוצאים כיום במע' החינוך ובכל העולם. תודה רבה, ותודה על סבלנותכם.