עמוס ביימל 8/1/04

סיבוכיות: תרגיל 5

<u>הגשה</u>: יום ד' 21/1/04 בהרצאה.

שאלה 1

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. קבוצה $U \subseteq V$ היא קשירה ב- G אם לכל $u,v \in U$ קיים מסלול מכוון מ- u ל- v ב- G.
נגדיר את השפה הבאה:
half-CON = { $G=(V,E)$: $|V|/2$ גרף מכוון שקיימת בו קבוצה קשירה בגודל לפחות G }.

סעיף א

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון בו $V=\{v_0,\dots,v_{n-1}\}$. הוכיחו כי G קשיר אם"ם $(G, v_i, v_{(i+1) \bmod n}) \in$ s-t-CON לכל $0 \le i \le n-1$.

סעיף ב

הוכיחו כי half-CON $\in \mathcal{NL}$.

סעיף ג

הוכיחו כי השפה half-CON היא $\mathcal{NL}$-קשה.

שאלה 2

נגדיר את המחלקה $\mathrm{P}/h(n)$ כאוסף כל השפות המתקבלות ע"י מ"ט פולינומית עם עצה באורך $h(n)$ התלויה רק באורך הקלט n. כלומר, לקלטים באותו אורך מתאימה אותה עצה. פורמלית, $L \in P/h(n)$ אם קיימת מ"ט דטרמיניסטית פולינומית M וסדרת מחרוזות $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך ש- $|a_n| \le h(n)$ ו- M מקבלת את $x, a_{|x|}$ (הקלט x משורשר עם המחרוזת $a_{|x|}$) אם"ם $x \in L$.

סעיף א

נסמן $\mathrm{P}/\mathrm{poly} = \bigcup_{c>0} \mathrm{P}/n^c$. הוכיחו כי $L \in \mathrm{P/poly}$ אם ורק אם קיימת סדרת מעגלים פולינומית המקבלת את L.

סעיף ב

נסמן $\mathcal{P}/\log = \bigcap_{c>0} \mathcal{P}/c\log n$. הוכיחו כי אם $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}/\log$, אז $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
<u>הדרכה</u>: השתמשו ברדוקציה העצמית של SAT, כלומר בעובדה שאם קיים אלגוריתם יעיל הבודק אם פסוק הוא ב-SAT, אזי קיים אלגוריתם יעיל המוצא הצבה לפסוק ספיק.

שאלה 3

נוסחה בוליאנית היא מעגל בוליאני שהגרף שלו הוא עץ. נגדיר את השפה FVAL:
$\mathrm{FVAL} = \{F, x : F \text{ is a Boolean formula s.t. } F(x) = 1\}$.
הוכיחו כי FVAL $\in \mathcal{DL}$. הסיקו כי $\mathcal{NC}^1 \subseteq \mathcal{DL}$.

שאלה 4

הוכיחו כי אם שפה L היא רגולרית אזי $L \in \mathcal{NC}^1$.

הדרכה: הסתכלו על ההוכחה כי $\text{s,t-CON} \in \mathcal{AC}^1$.

שאלה 5

מעגל בוליאני C עם $2n$ קלטים מייצג גרף $G=(V,E)$ בו $V=\{0,1\}^n$ (כלומר, הצמתים בגרף הם 2^n המחרוזות באורך n) ו- $(u,v) \in E$ אם ורק אם $C(uv)=1$. נגדיר את השפה הבאה:

compact-s-t-CON = { C,s,t : G מעגל עם $2n$ קלטים המייצג גרף G, $s,t \in \{0,1\}^n$ וקיים מסלול מ- s ל- t ב- G }.

סעיף א

הוכיחו כי compact-s-t-CON $\in \mathcal{PSPACE}$.

רמז: אפשר לתאר אלגוריתם אי-דטרמיניסטי.

סעיף ב

הוכיחו כי compact-s-t-CON היא $\mathcal{PSPACE}$ קשה תחת רדוקציות פולינומיות (כלומר, לכל $A \in \mathcal{PSPACE}$ מתקיים $A \leq^{\text{p}}$ compact-s-t-CON).