עמוס ביימל 24/12/03

סיבוכיות: תרגיל 4

הגשה: יום ד' 7/1/04 בהרצאה.

שאלה 1

סעיף א

תהי $L=\{w\#w : w\in\{a,b\}^*\}$. הוכיחו כי $L\in \mathrm{DSPACE}(\log n)$ ו- $L\in \mathrm{DTIME}(O(n))$.

סעיף ב

נתון גרף מכוון G. שני מסלולים ב- G הם שונים אם קיימת קשת המופיעה במסלול אחד ולא מופיעה במסלול השני (המסלולים לא בהכרח פשוטים). תהי

2-s-t-CON = { G,s,t : t -ל s -מ שונים מסלולים שני לפחות קיימים G -ב }.

הוכיחו כי 2-s-t-CON $\in$ NSPACE($\log n$).

סעיף ג

תהי unique-s-t-CON = { G,s,t : t -ל s -מ יחיד מסלול קיים G -ב }. הוכיחו כי unique-s-t-CON $\in \mathcal{NL}$.

שאלה 2

סעיף א

הוכיחו כי אם $\mathcal{DTIME}(n) \subseteq \mathcal{NL}$ אזי $\mathcal{DTIME}(n^2) \subseteq \mathcal{NL}$. בסעיף זה ניתן להסתמך על עקרון התרגום כלפי מעלה מבלי להוכיח אותו. יש לנסח במדויק את הטענה עליה מסתמכים (כלומר, מהם הפונקציות בהם משתמשים בתרגום).

סעיף ב'

הוכיחו כי $\mathcal{DTIME}(n) \neq \mathcal{NL}$.

הדרכה: השתמשו בסעיף א' ובמשפט ההיררכיה עבור $\mathcal{DTIME}$ כדי להגיע לסתירה.

שאלה 3

גרף מכוון $G=(V,E)$ הוא גרף שכבות אם קיימת חלוקה של V ל- k קבוצות זרות $V_1,V_2,\ldots,V_k$ כך שהקשתות עוברות רק משכבה לשכבה שאחריה, כלומר,

$$E \subseteq V_1\times V_2 \cup V_2\times V_3 \cup \ldots \cup V_{k-1}\times V_k.$$

נגדיר את השפה odd-CON:

קלט G,s,t שייך לשפה odd-CON אם $G=(V_1,V_2,\ldots,V_k,E)$ הוא גרף שכבות, $s\in V_1$, $t\in V_k$, ומספר המסלולים מצומת s לצומת t בגרף הוא אי-זוגי.

הוכיחו כי odd-CON $\in \mathcal{DSPACE}(\log^2 n)$. אין צורך לבדוק שהגרף הוא אומנם גרף שכבות.

הדרכה: הסתכלו על הוכחת משפט Savitch.

שאלה 4

שפה L היא אונרית אם $L \subseteq 1^*$.

סעיף א

הוכיחו כי אם $\bigcup_{c>0} \mathcal{NTIME}(2^{cn}) \neq \bigcup_{c>0} \mathcal{DTIME}(2^{cn})$ אזי קיימת שפה אונרית L כך ש- $L \in \mathcal{NP} - \mathcal{P}$.

<u>הדרכה</u>: קחו $L \in \bigcup_{c>0} \mathcal{NTIME}(2^{cn}) - \bigcup_{c>0} \mathcal{DTIME}(2^{cn})$ ותרגמו אותה לשפה ב- $\mathcal{NP}$ כך שהשפה המנופחת היינה אונרית. הוכיחו טענותיכם!

סעיף ב

הוכיחו כי אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אזי קיימת שפה שאינה ב- $\mathcal{RE}$ ואינה $\mathcal{NP}$-קשה.

<u>הדרכה</u>: בנו שפה אונרית שאינה ב- $\mathcal{RE}$.

שאלה 5

שאלה זו עוסקת בהיררכיה עבור NSPACE.

סעיף א

הוכיחו ע"י הוכחה פשוטה על סמך משפטים שהוכחו בכיתה כי אם $\lim_{n\to\infty} \frac{(s_1(n))^2}{s_2(n)} = 0$ אזי $\mathcal{NSPACE}(s_1(n)) \subset \mathcal{NSPACE}(s_2(n))$.

סעיף ב

הוכיחו את משפט ההיררכיה עבור $\mathcal{NSPACE}$ תוך הסתמכות על משפט Immerman-Szelepscenyi.

הדרכה: הסתכלו על השפה

$$\left\{ x = (\langle M \rangle, 1^i) \quad : \quad \begin{array}{c} M \text{ is a non-deterministic TM} \\ M \text{ accepts } x \text{ in at least one comutation} \\ \text{using at most } s_2(|x|)/|\Gamma| \text{ space} \end{array} \right\}.$$