עמוס ביימל **10/12/03**

סיבוכיות: תרגיל 3

<u>הגשה</u>: יום ד' 24/12/03 בהרצאה.

שאלה 1

יהיו $G_1=(V_1,E_1)$ ו- $G_2=(V_2,E_2)$ שני גרפים לא מכוונים. פונקציה $f:V_1\to V_2$ נקראת <u>איזומורפיזם</u> מ- G_1 ל- G_2 אם f היא חד-חד ערכית ועל ומקיימת $(u,v)\in E_1$ אם ורק אם $(f(u),f(v))\in E_2$. נגדיר את היחס GI: $f \in \mathrm{GI}$ אם (G_1, G_2), f הוא איזומורפיזם מ- G_1 ל- G_2.

הוכיחו כי היחס GI ניתן לרדוקציה עצמית.

<u>הדרכה</u>:

עבור כל צומת v ב- G_1 יש למצוא לאיזה צומת u ב- G_2 הוא מועתק. ניתן להיעזר באבחנה הבאה:

יהי d מספר טבעי וניח שקיים צומת יחיד v ב- G_1 בעל דרגה d וקיים צומת יחיד u ב- G_2 בעל דרגה d.

אם קיים איזומורפיזם f מ- G_1 ל- G_2, אזי $f(v) = u$.

שאלה 2

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם n צמתים. קבוצה $D \subseteq V$ היא <u>קבוצה שלטת</u> ב- G אם לכל $v \in V - D$ קיים צומת $u \in D$ כך ש- $(u \to v) \in E$. נגדיר את השפה הבאה:

Dom-Set = {(G,k) : k יש קבוצה שלטת בגודל לכל היותר ב- G}.

סעיף א

הוכיחו כי Dom-Set $\in \mathcal{NP}$.

סעיף ב

הוכיחו כי Dom-Set היא $\mathcal{NP}$-קשה ע"י רדוקציה מהשפה Set-Cover.

סעיף ג

הוכיחו כי אם עבור קבוע $a \geq 1$ קיים אלגוריתם יעיל אשר a-מקרב את בעיית הקבוצה השלטת הקטנה ביותר אזי קיים אלגוריתם יעיל אשר a-מקרב את בעיית הכיסוי בקבוצות הקטן ביותר.

שאלה 3

נגדיר את בעיית האופטימיזציה max-3-IS:

בהינתן גרף לא-מכוון שדרגת כל צומת בו היא לכל היותר 3 יש למצוא קבוצה בלתי תלויה גדולה ביותר בגרף.

הראו כי ניתן לקרב בזמן פולינומי את max-3-IS עם יחס קירוב ⅓.

שאלה 4

בהינתן גרף G, נסמן ב- $\mathrm{IS}(G)$ את גודל הקבוצה הבלתי תלויה גדולה ביותר ב- G, וב- $\chi(G)$ את המספר הקטן ביותר של צבעים בצביעה חוקית של G. נגדיר שתי בעיות אופטימיזציה:

- בעיית האופטימיזציה min-COLORING:

  בהינתן גרף G, יש למצוא צביעה של G ב- $\chi(G)$ צבעים.

- בעיית האופטימיזציה max-IS:

  בהינתן גרף G, יש למצוא קבוצה בלתי תלויה בגודל $\mathrm{IS}(G)$.

סעיף א

הוכיחו כי אם קיימת צביעה של G ע"י k צבעים אזי קיימת קבוצה בלתי תלויה בגרף בגודל $|V|/k$.

סעיף ב

יהי $0 < \alpha \leq 1$. הוכיחו כי אם קיים אלגוריתם פולינומי ש α מקרב את בעיית max-IS, אזי קיים אלגוריתם פולינומי ש $\frac{\ln n}{\alpha}$ מקרב את min-COLORING.

שאלה 5

נגדיר את השפה הבאה:

$$\mathrm{VC}_{\log n} = \{G : G \text{ is a graph with } n \text{ vertices and a vertex cover of size } \log n\}.$$

בשאלה זו תראו אלגוריתם יעיל עבור שפה זו.

סעיף א

תארו אלגוריתם יעיל אשר מקבל גרף ומקיים:

1. אם קיים בגרף כיסוי בצמתים בגודל $\log n$, האלגוריתם מוצא כיסוי בצמתים בגודל לכל היותר $2\log n$.
2. אם גודל כיסוי בצמתים קטן הוא יותר מ- $2\log n$, אזי האלגוריתם מכריז כי אין בגרף כיסוי בצמתים בגודל $\log n$.
3. אם בגרף כיסוי בצמתים קטן ביותר הוא בין $\log n$ לבין $2\log n$, אזי לאלגוריתם מותר לענות בשתי האפשרויות.

סעיף ב

נסמן ב- $N(v)$ את קבוצת השכנים של v ב- G. הוכיחו כי לכל כיסוי בצמתים C ולכל $v \notin C$ מתקיים $N(v) \subseteq C$.

סעיף ג

יהי C כיסוי בצמתים ו- C_0 כיסוי בצמתים קטן ביותר ב- G. הוכיחו כי קיימת קבוצה $A \subseteq B$ כך ש- $C_0 = A \cup \bigcup_{v \notin A} N(v)$.

סעיף ד

תארו אלגוריתם פולינומי עבור $VC_{\log n}$.