עמוס ביימל 25/11/2003

סיבוכיות: תרגיל 2

הגשה: יום ד' 10/12/03 בהרצאה.

שאלה 1

נתונות שפות $A,B \in NP$, ויחסים R_A,R_B המוכיחים זאת (כלומר, $A=\{x:\exists y(x,y)\in R_A\}$ כאשר R_A עונה לדרישות בהגדרת NP). רדוקציה f מ A ל- B משמרת מספר עדים אם לכל x מתקיים $|\{y:(x,y)\in R_A\}|=|\{z:(f(x),z)\in R_B\}|$. כלומר, מספר העדים לכך ש- $x\in A$ שווה למספר העדים לכך ש- $f(x)\in B$ (בפרט, אם $x\notin A$ אזי מספר העדים עבור x ו $f(x)$ הוא אפס).

סעיף א

הסבירו מדוע הרדוקציה שתוארה בהוכחת משפט Cook-Levin משמרת מספר עדים.

סעיף ב

הראו כי הרדוקציה שתוארה בכיתה מ SAT ל 3SAT אינה משמרת מספר עדים.

סעיף ג

האם הרדוקציה שתוארה בכיתה מ - 3SAT ל- IS משמרת מספר עדים? הסבירו תשובתכם?

שאלה 2

יהי φ פסוק 3-CNF. הצבה מספקת-לא-מספקת של φ היא הצבה כך שבכל פסוקית של φ יש ליטרל שמסתפק וליטרל שלא מסתפק. כלומר, זוהי הצבה המספקת את φ אבל לא מספקת בו-זמנית 3 ליטרלים המופיעים באותה פסוקית. נגדיר את השפה SAT≠ כאוסף כל פסוקי 3-CNF שיש להם הצבה מספקת-לא-מספקת.

סעיף א'

הראו כי המשלים של הצבה מספקת-לא-מספקת הוא הצבה מספקת-לא-מספקת.

סעיף ב'

הוכיחו כי SAT≠ היא $\mathcal{NP}$-שלמה.

הדרכה: הראו רדוקציה מ-3SAT בה מחליפים כל פסוקית $(\ell_1\vee\ell_2\vee\ell_3)$ בשתי פסוקיות

$$(\ell_1\vee\ell_2\vee t_i)\wedge(\overline{t_i}\vee\ell_3\vee b)$$

כאשר t_i הוא משתנה חדש עבור הפסוקית C_i ו- b הוא משתנה חדש יחיד.

שאלה 3

סעיף א'

קבוצת צמתים בגרף פשוט לא מכוון תקרא <u>קבוצת משוב</u> (Feedback Set) אם סילוקה מהגרף יחד עם הקשתות הפוגעות בה יותיר גרף חסר מעגלים. הוכיחו כי השפה הבאה FS היא $\mathcal{NP}$-שלמה:

$$\text{FS}=\{G,k : G \text{ has a feedback set of size } k\}.$$

<u>הדרכה</u>: כדי להראות כי FS היא $\mathcal{NP}$-קשה אתם יכולים להראות רדוקציה מ- VC.

סעיף ב'

נגדיר $\text{3-FS}=\{G : G \text{ has a feedback set of size } 3\}$. האם 3-FS היא $\mathcal{NP}$-שלמה? נמקו תשובתכם.

שאלה 4

נאמר כי $L \in \text{co-}\mathcal{NP}$ אם ורק אם $\overline{L} \in \mathcal{NP}$.

סעיף א'

הוכיחו כי אם קיימת שפה L המקיימת $L \in \mathcal{NP}\text{-comp}$ וגם $L \in \text{co-}\mathcal{NP}$, אזי $\text{co-}\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$.

סעיף ב'

תהי L שפה כך שלכל n מתקיים $|L \cap \{0,1\}^n| = n$, כלומר לכל n מספר המילים באורך n הוא <u>בדיוק</u> n. הוכיחו כי אם $L \in \mathcal{NP}$ אזי $\overline{L} \in \mathcal{NP}$.

שאלה 5

נאמר כי שפה $L \subseteq \{0,1\}^*$ היא צפופה אם קיים קבוע c כך שלכל n מתקיים $\left|L \cap \{0,1\}^n\right| \geq 2^n - n^c$, כלומר לכל n מספר המילים ב- $\{0,1\}^n$ שאינם ב- L הוא לכל היותר n^c. הוכיחו כי אם קיימת שפה צפופה שהיא $\mathcal{NP}$-קשה אזי $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.