עמוס ביימל 21/01/03

סיבוכיות: שאלות חזרה

שאלה 1

סעיף א

נגדיר את השפה הבאה: $L_{\Sigma^*} = \{\langle M\rangle : L(M) = \Sigma^*\}$. הוכיחו כי $L_{\Sigma^*} \notin \mathcal{RE}$ וגם $\overline{L_{\Sigma^*}} \notin \mathcal{RE}$.
<u>הערה</u>: אפשר להוכיח את שתי הטענות על ידי רדוקציה אחת.

סעיף ב

המחלקה $\forall\mathcal{RE}$ מוגדרת באופן הבא:

שפה $L \in \forall\mathcal{RE}$ אם ורק אם קיימת $L_0 \in \mathcal{RE}$ כך ש-$L = \{ x : \forall y \ \ (x,y) \in L_0 \}$.

הוכיחו כי $L_{\Sigma^*} \in \forall\mathcal{RE}$.

סעיף ג

שפה B היא $\forall\mathcal{RE}$ קשה אם לכל $L \in \forall\mathcal{RE}$ מתקיים $L \le B$. הוכיחו כי L_{Σ^*} היא $\forall\mathcal{RE}$ קשה.

סעיף ד

הוכיחו כי אם שפה B היא $\forall\mathcal{RE}$ קשה, אזי $B \notin \mathcal{RE}$.

שאלה 2

תהי $L_{\text{EMP,not-EMP}} = \{\langle M_1\rangle,\langle M_2\rangle : L(\langle M_1\rangle)=\phi \text{ and } L(\langle M_2\rangle)\neq\phi \}$.
הראו כי לכל $L \in \mathcal{RE} \cup \text{co}\mathcal{RE}$ מתקיים $L \le L_{\text{EMP,not-EMP}}$.

שאלה 3

תהי A שפה. נגדיר את השפה C_A הבאה: $C_A = \{ \langle M\rangle : A \subseteq L(M) \}$.

סעיף א

הוכיחו כי לכל שפה <u>סופית</u> A כאשר $A \neq \varnothing$ מתקיים $C_A \in \mathcal{RE} - \mathcal{R}$.

סעיף ב

הוכיחו כי לכל שפה <u>אינסופית</u> A מתקיים $C_A \notin \mathcal{RE}$.

שאלה 4

נגדיר את השפה L_{even}:

L_{even} = { <M> : $L(M)$ הוא זוגי { מספר המילים בשפה }.

הערה: אם יש אינסוף מילים ב- $L(M)$ אזי <M> $\notin L_{even}$.

סעיף א

הוכיחו כי $L_{even} \notin \mathcal{RE}$.

סעיף ב

הוכיחו $L_{even} \notin \text{co}\mathcal{RE}$.

שאלה 5

סווגו כל אחת מהשפות הבאות לאחת מהאפשרויות הבאות:

1. $L \in \mathcal{P}$.
2. $L \in \mathcal{NP}$-comp (זכרו במקרה זה להוכיח כי $L \in \mathcal{NP}$).

יש להוכיח את תשובותיכם.

1. 3-CLIQUE = { G : G=(V,E) has a clique of size $|V|$-3 }.
2. HALF-CLIQUE = { G : G=(V,E) has a clique of size $|V|/2$ }.
3. 4COLORING = { G : G has a coloring with 4 colors }

שאלה 6

נגדיר את מחלקת השפות Δ_P:

$L \in \Delta_P$ אם ורק אם קיימות $L_1 \in \mathcal{NP}$ ו- $L_2 \in \text{co}\mathcal{NP}$ כך ש- $L = L_1 \cap L_2$.

שימו לב כי Δ_P <u>איננה</u> שווה ל- $\mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$.

סעיף א

הוכיחו כי $\mathcal{NP} \cup \text{co}\mathcal{NP} \subseteq \Delta$.

סעיף ב

נגדיר את השפה SAT-noSAT:

SAT-noSAT = { (φ, φ) : $\varphi \in$ 3SAT, $\varphi \notin$ 3SAT }.

הוכיחו בקצרה כי SAT-noSAT היא Δ-שלמה ביחס לרדוקציות העתקה פולינומיאליות.

סעיף ג

הוכיחו כי SAT $\in \text{co}\mathcal{NP}$ אם ורק אם $\mathcal{NP} = \Delta$.

שאלה 7

3-צביעה של גרף G=(V,E) היא פונקציה $c: V \to \{1,2,3\}$ המקיימת:

אם $(v_1,v_2) \in E$ אזי $c(v_1) \neq c(v_2)$.

הוכיחו בצורה ישירה כי אם קיים אלגוריתם יעיל הבודק אם גרף הוא 3-צביע אזי קיים אלגוריתם יעיל המוצא 3-צביעה של הגרף (אם היא קיימת).
הערה: בשאלה זו אין להשתמש במשפט קוק-לוין.

שאלה 8

בהינתן n קבוצות $S_1,...,S_n$, נאמר כי קבוצה $I \subseteq \{1,...,n\}$ היא אוסף של קבוצות לא-זרות אם לכל $i,j \in I$ מתקיים $S_i \cap S_j \neq \varnothing$. כלומר, כל שתי קבוצות באוסף נחתכות.
נגדיר:

- השפה XS: $\{ \langle S_1,...,S_n,k \rangle : $ ב- $S_1,...,S_n$ קיים אוסף של קבוצות לא-זרות בגודל $k \}$=XS.
- בעיית האופטימיזציה max-XS:

  בהינתן n קבוצות $S_1,...,S_n$, יש למצוא אוסף גדול ביותר של קבוצות לא-זרות.
- בעיית האופטימיזציה max-CLIQUE:

  בהינתן גרף G, יש למצוא קליק גדול ביותר ב- G.

סעיף א

הוכיחו כי XS היא $\mathcal{NP}$-שלמה.
רמז: רדוקציה מ- CLIQUE.

סעיף ב

הוכיחו כי אם אפשר לקרב את הבעיה max- CLIQUE עם יחס קירוב c, אזי אפשר לקרב את הבעיה max-XS עם יחס קירוב c.

שאלה 9

נתון גרף $G=(V,E)$ לא-מכוון מלא בו לכל קשת e יש משקל $w(e)$ שהוא שלם חיובי. מעגל המילטוני הוא מעגל פשוט המבקר בכל צומת בגרף בדיוק פעם אחת. נגדיר את בעיית האופטימיזציה TSP: בהינתן גרף G עם משקלים בתחום $\{1,...,w\}$, יש למצוא מעגל המילטוני ב- G שמשקלו קטן ביותר.

סעיף א

בהינתן גרף G עם משקלים בתחום $\{1,...,w\}$, הוכיחו כי כל מסלול המילטוני מקרב את בעיית ה-TSP בגרף G עם יחס קירוב w.

סעיף ב

גרף $G=(V,E)$ לא-מכוון מלא מקיים את אי-השוויון המשולש עם קבוע c אם לכל מסלול $x_1, x_2,..., x_k$ מתקיים:

$$w((x_1, x_k)) \leqslant c\,(w((x_1, x_2)) + w((x_2, x_3)) + ... + w((x_{k-1}, x_k)))$$

הראו איך לקרב עם יחס קירוב $1.5c$ את בעיית ה- TSP בגרף המקיים את אי-השוויון המשולש עם קבוע c.

סעיף ג

בהינתן גרף G עם משקלים בתחום $\{1,...,w\}$, הראו איך לקרב את בעיית ה- TSP בגרף G עם יחס קירוב $0.75w$.

שאלה 10

שאלה זו עוסקת בהיררכיה עבור NSPACE.

סעיף א

הוכיחו ע"י הוכחה פשוטה על סמך משפטים שהוכחו בכיתה כי אם $\lim_{n\to\infty}\frac{(s_1(n))^2}{s_2(n)}=0$ אזי

$\mathcal{NSPACE}(s_1(n)) \subset \mathcal{NSPACE}(s_2(n))$.

סעיף ב

הוכיחו את משפט ההיררכיה עבור $\mathcal{NSPACE}$ תוך הסתמכות על משפט Immerman-Szelepscenyi.

הדרכה: הסתכלו על השפה

$$\left\{ x=(\langle M\rangle,1^i) \;:\; \begin{array}{c} M \text{ is a non-deterministic TM} \\ M \text{ accepts } x \text{ in at least one comutation} \\ \text{within at most } |x|/|\Gamma| \text{ steps} \end{array} \right\}.$$

שאלה 11

גרף מכוון $G=(V,E)$ הוא גרף שכבות אם קיימת חלוקה של V ל- k קבוצות זרות $V_1,V_2,...,V_k$ כך שהקשתות עוברות רק משכבה לשכבה שאחריה, כלומר,

$$E \subseteq V \times V \;\cup\; V \times V_3 \cup \;...\; \cup\; V_{k-} \times V_k.$$

נגדיר:

DAG-CON={ G,s,t : G is a directed <u>acyclic</u> graph that contains a path from s to t }.

הוכיחו כי DAG-CON היא $\mathcal{NL}$ שלמה.

<u>הדרכה</u>: להוכיח כי DAG-CON היא $\mathcal{NL}$ קשה, בהינתן קלט ל- s,t-CON, בנו גרף בו כל צומת היא זוג (v,i) כאשר v הוא צומת בגרף המקורי ו- $1 \le i \le n$.

שאלה 12

הוכיחו כי אם s-t-CON $\in \mathcal{DL}$ אזי קיימת מ"ט M דטרמיניסטית המשתמשת בזיכרון $\log n$ כך שעל קלט גרף מכוון חסר מעגלים G וצמתים s ו- t המכונה M מחזירה מסלול מכוון מ- s ל- t בגרף (אם קיים).

שאלה 13

נגדיר את השפה PBA:

PBA = { $<M>,x,1^n$: M היא מ"ט דטרמיניסטית המקבלת את x תוך לכל היותר n צעדים }.

סעיף א

הוכיחו כי PBA היא $\mathcal{P}$ שלמה תחת רדוקציות זיכרון לוגריתמי.

סעיף ב

נגדיר $\text{poly}\mathcal{L} = \bigcup_{c\ge 1}\mathcal{DSPACE}(\log^c n)$. הוכיחו כי אם PBA $\in \text{poly}\mathcal{L}$ אזי קיים $c \ge 1$ כך ש- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{DSPACE}(\log^c n)$.

סעיף ג

הוכיחו כי $\mathcal{L} \neq \text{poly}\mathcal{P}$.

הדרכה: השתמשו בסעיף ב' ובמשפט ההיררכיה עבור $\mathcal{DSPACE}$ כדי להגיע לסתירה.

שאלה 14

נגדיר את השפה B:

$B = \{ \langle M \rangle, x$: M מ"ט דטרמינסטית המקבלת את x תוך לכל היותר $2^{|x|}$ צעדים $\}$.

סעיף א

תהי $T(n) > 5n$ פונקציית-זמן. הוכיחו כי אם $B \in \mathcal{DTIME}(T(n))$, אזי

$\mathcal{DTIME}(2^n) \subseteq \mathcal{DTIME}(T(n))$.

סעיף ב

הוכיחו כי $B \notin \text{DTIME}(2^{0.5n})$.

שאלה 15

סעיף א

הוכיחו כי אם $\text{SAT} \in \mathcal{BPP}$ אזי קיים אלגוריתם אקראי פולינומי שמקבל פסוק CNF, ומוצא הצבה מספקת לפסוק (אם קיימת).

סעיף ב

הוכיחו כי אם $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{BPP}$ אזי $\mathcal{NP} = \mathcal{RP}$.

שאלה 16

נגדיר את המחלקה $\mathcal{PP}$:

$L \in \mathcal{PP}$ אם קיימת מ"ט מטילת מטבעות הרצה בזמן פולינומי ומתקיים:

אם $x \in L$ אזי $\Pr[\ M$ מקבלת את $x\ ] > \frac{1}{2}$.

אם $x \notin L$ אזי $\Pr[\ M$ מקבלת את $x\ ] \leq \frac{1}{2}$.

כמו כן, נגדיר את השפות הבאות:

$\text{MAJ-SAT} = \{ \varphi$: φ פסוק CNF עם n משתנים שיש לו יותר מ- 2^{n-1} הצבות מספקות $\}$.

$\text{THRESHOLD-SAT} = \{ \varphi, k$: φ פסוק CNF שיש לו יותר מ- k הצבות מספקות $\}$.

סעיף א

הוכיחו כי $\text{MAJ-SAT} \in \mathcal{PP}$.

סעיף ב

הוכיחו כי השפה THRESHOLD-SAT היא $\mathcal{PP}$-קשה תחת רדוקציות פולינומיות.

הדרכה: בהנתן מ"ט א"ד פולינומית M וקלט x, הסתכלו על הפסוק $\varphi_{M,x}$ שבונה הרדוקציה ממשפט Cock-Levin.

שאלה 17

נגדיר את מחלקת השפות $\mathcal{ZPP}$:

$L \in \mathcal{ZPP}$ אם קיימת מ"ט מטילת מטבעות M הרצה בזמן פולינומי בעלת שלושה מצבים סופיים: מצב מקבל, מצב דוחה ומצב "לא ידוע" ומתקיים:

1. אם $x \in L$ אזי $\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] > \frac{1}{2}$ ו- $\Pr[\ M \text{ דוחה את } x\ ] = 0$.
2. אם $x \notin L$ אזי $\Pr[\ M \text{ דוחה את } x\ ] > \frac{1}{2}$ ו- $\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] = 0$.

כלומר M לכל קלט צודקת בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$, לעולם אינה טועה, אך היא יכולה לעצור עם תשובה "לא ידוע".

הוכיחו כי $\mathcal{ZPP} = \mathcal{RP} \cap \text{co}\mathcal{RP}$.

שאלה 18

סעיף א

בסעיף זה נראה איך לממש "מונה אקראי" המשתמש בזיכרון $O(\log k)$ ומונה עד 2^k:

1. הטל מטבע k פעמים. אם כל ההטלות היו 0 אזי עצור, אחרת לך ל-1.

הוכיחו:

- האלגוריתם משתמש בזיכרון $O(\log k)$.
- ההסתברות שהאלגוריתם יבצע את צעד 1 פחות מ- 2^{k-1} פעמים היא לכל היותר $\frac{1}{2}$.
  הדרכה: השתמשו בעובדה שהסתברות איחוד של מאורעות היא לכל היותר סכום ההסתברויות של המאורעות.
- ההסתברות שהאלגוריתם לא יעצור היא 0.

סעיף ב

הראה כי קיימת מ"ט מטילת מטבעות M פולינומית המשתמשת בזיכרון $O(\log n)$, כך שעל קלט גרף מכוון G וזוג צמתים s ו- t, מקיימת:

- אם $G,s,t \in \text{s-t-CON}$ אזי $P_M(G,s,t) \geq 1/n^n$,
- אם $G,s,t \notin \text{s-t-CON}$ אזי $P_M(G,s,t) = 0$.

סעיף ג

השתמשו בסעיפים א ו- ב כדי להוכיח כי $L \in \mathcal{NL}$ אם ורק אם קיימת מ"ט מטילת מטבעות M המשתמשת בזיכרון $O(\log n)$ המקיימת:

- אם $x \in \mathcal{L}$ אזי $P_M(x) \geq \frac{1}{2}$,
- אם $x \notin \mathcal{L}$ אזי $P_M(x) = 0$.
- לכל x ההסתברות ש- M לא תעצור על x היא 0.

הערה: בשאלה זו $P_M(x)$ הוא ההסתברות שמ"ט M מקבלת קלט x.

שאלה 19

הוכיחו כי אם שפה L היא רגולרית אזי $L \in \mathcal{NC}^1$.

הדרכה: הסתכלו על ההוכחה כי $\text{s,t-CON} \in \mathcal{AC}^1$.