

המחלקה למדעי המחשב

דר' עמום בימל'

סיבוכיות – 202-2-1111

סמסטר א' תשס"ג

14.2.2003

הנחיות:

1. בטופס הבדיקה שלושה דפים בלבד דף זה. ודאו כי כולם נמצאים בידיכם.
2. בבדיקה 5 שאלות שמשקלן שווה. **יש לענות על 4 שאלות בלבד.**
3. סמנו על העמוד הראשון של מחרת הבדיקה את 4 השאלות שעניתם עליהם. שאלות אחרות לא יבדקו!
4. הבדיקה עם חומר פתוח.
5. נמקו את כל תשובותיכם. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל.
6. משך הבדיקה 3 שעות.
7. מומלץ לא להיתקע זמן רב מדי על שום סעיף.
8. הנכם רשאים להסתמך על סעיפים קודמים, גם אם לא השבתם עליהם.

ברצחה!



Steam Powered Turing Machine, University of Washington, Seattle

שאלה 1 [25 נקודות]

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. קבוצה $V \subseteq U$ היא קשירה ב- G אם לכל $v \in V$, קיים מסלול מכוון מ- v ל- u ב- G .
נגידר את השפה הבאה:
.half-CON = { $G=(V,E) : |V|/2 \leq \text{gcd}(\text{sum of degrees of vertices in } G, 2) \leq 1$ }

סעיף א [5 נקודות]

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון בו $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ היא קשירה אם ו רק אם $\text{gcd}(\text{sum of degrees of vertices in } G, 2) \leq 1$.

סעיף ב [12 נקודות]

הוכיחו כי $\text{half-CON} \in \mathcal{NL}$.

סעיף ג [8 נקודות]

הוכיחו כי השפה half-CON היא \mathcal{NL} -קשה.

שאלה 2 [25 נקודות]

מ"ט מטילת מטבעות M רצתה בזמן פולינומי בממוצע אם קיים $c > 0$ כך שלכל קלט x זמן הריצעה הממוצע של M על x הוא לכל היותר $|x|c$.
נגידר את מהלket השפות average- \mathcal{PP} :
average- \mathcal{PP} = { $L \in \text{average-PP} : \Pr[x \in L] \geq c$ }.
אם $x \in L$ אז $\Pr[x \in L] \geq c$.
אם $x \notin L$ אז $\Pr[x \in L] = 0$.

סעיף א [13 נקודות]

הוכיחו כי $\mathcal{RE} \subseteq \text{average-PP}$.

סעיף ב [12 נקודות]

הוכיחו כי $\text{average-PP} \subseteq \mathcal{RE}$.

שאלה 3 [25 נקודות]

בහינתן גרף G , נסמן ב- $\text{IS}(G)$ את גודל הקבוצה הבלתי תלולה בגודלה ביותר ב- G , וב- $\alpha(G)$ את המספר הקטן ביותר של צבעים בצביעה חוקית של G . נגידר שני בעיות אופטימיזציה:

- בעיית האופטימיזציה min-COLORING :

בහינתן גרף G , יש למצוא צבעה של G ב- $\alpha(G)$ צבעים.

- בעיית האופטימיזציה max-IS :

בහינתן גרף G , יש למצוא קבוצה בלתי תלולה בגודל $\text{IS}(G)$.

סעיף א [5 נקודות]

הוכיחו כי אם קיימת צבעה של G ע"י k צבעים אז קיימת קבוצה בלתי תלולה בגרף בגודל k/α .

סעיף ב [13 נקודות]

יהי $1 \leq \alpha < 0$. הוכיחו כי אם קיימים אלגוריתם פולינומי ש- α מקרב את בעיית IS-max , אז קיימים אלגוריתם פולינומי

ש- $\frac{\ln n}{\alpha}$ מקרב את min-COLORING .

סעיף ג [7 נקודות]

הוכיחו כי אם קיימים אלגוריתם פולינומי אקראי שלכל G בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ מזריר קבוצה בלתי-תלויה בגודל לפחות $\alpha \cdot \text{IS}(G)$, אז קיימים אלגוריתם פולינומי אקראי שלכל G בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ מזריר צבעה עם לכל היותר

צבעים. $\frac{\ln n}{\alpha} \cdot \chi(G)$

שאלה 4 [25 נקודות]

מעגל בוליאני C עם $2n$ קלטים מייצג גרף $G = (V, E)$ בו $V = \{0, 1\}^n$ (כלומר, הצלמים בגרף הם 2^n המחרוזות באורך n) ו- $(u, v) \in E$ אם ורק אם $C(uv) = 1$. נגידר את השפה הhabah:

$\text{compact-s-t-CON} = \{ C, s, t : G \text{ מילול מ- } s \text{ ל- } t \text{ ב- } \{0, 1\}^n \text{ וקיים מסלול מ- } s, t \in V \}$

סעיף א [12 נקודות]

הוכיחו כי $\text{compact-s-t-CON} \in \text{PSPACE}$.
רמז: אפשר לתאר אלגוריתם אי-דטרמיניסטי.

סעיף ב [13 נקודות]

הוכיחו כי compact-s-t-CON הוא PSPACE קשה תחת רדוקציות פולינומיות (כלומר, לכל $A \in \text{PSPACE}$ מתקיים $(A \leq^p \text{compact-s-t-CON})$.

שאלה 5 [25 נקודות]

תהיינה A, B שפות. נסמן \leq^{\log^2} אם קיימת רדוקציה f המקיים את שלושת התנאים הבאים:

1. קיימת מ"ט דטרמיניסטיבית המשמשת בזיכרון עבודה n^{\log^2} ומחשבת את $f(x)$.

2. קיימים קבוע c כך ש $|f(x)| \leq |x|^c$ לכל x , וגם

3. $f(x) \in B$ אם ורק אם $x \in A$.

$A \in C$ סgorה תחת רדוקציות \leq^{\log^2} אם לכל שפה $B \in C$ ולכל שפה A , אם $A \in C$ אז $A \leq^{\log^2} B$.

סעיף א [13 נקודות]

תהי n פונקציה זיכרון כר ש- $s(n) = O(n)$. הוכחו כי המחלקה $\mathcal{DSPACE}(s(n))$ סgorה תחת רדוקציות \leq^{\log^2} .

סעיף ב [12 נקודות]

הוכחו כי המחלקה \mathcal{DL} אינה סgorה תחת רדוקציות \leq^{\log^2} .