עמוס ביימל 06/02/02

סיבוכיות: שאלות חזרה

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $\mathcal{C}$ היא תת-מחלקה לא טריביאלית של $\mathcal{RE}$ כאשר $\varnothing \in \mathcal{C}$, אזי $L_{\mathcal{C}} \in \mathcal{RE}$.
2. אם $\mathcal{C}$ היא תת-מחלקה לא טריביאלית של $\mathcal{RE}$ כאשר $\varnothing \in \mathcal{C}$, אזי $L_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{RE}$.
3. אם $\mathcal{C}$ היא תת-מחלקה לא טריביאלית של $\mathcal{RE}$ כאשר $\varnothing \notin \mathcal{C}$, אזי $L_{\mathcal{C}} \in \mathcal{RE}$.
4. אם $\mathcal{C}$ היא תת-מחלקה לא טריביאלית של $\mathcal{RE}$ כאשר $\varnothing \notin \mathcal{C}$, אזי $L_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{RE}$.

שאלה 2

תהי $L_{\text{EMP,not-EMP}} = \{ \langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle : L(\langle M_1 \rangle) = \phi \text{ and } L(\langle M_2 \rangle) \neq \phi \}$

הראו כי לכל $L \in \mathcal{RE} \cup \text{co}\mathcal{RE}$ מתקיים $L \leq L_{\text{EMP,not-EMP}}$.

שאלה 3

נגדיר את מחלקת השפות Δ_P:

$L \in \Delta_P$ אם ורק אם קיימות $L_1 \in \mathcal{NP}$ ו- $L_2 \in \text{co}\mathcal{NP}$ כך ש- $L = L_1 \cap L_2$.

שימו לב כי Δ_P <u>איננה</u> שווה ל- $\mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$.

סעיף א'

הוכיחו כי $\mathcal{NP} \cup \text{co}\mathcal{NP} \subseteq \Delta_P$.

סעיף ב'

נגדיר את השפה SAT-noSAT:

$\text{SAT-noSAT} = \{ (\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 \in 3\text{SAT}, \varphi_2 \notin 3\text{SAT} \}$.

הוכיחו בקצרה כי SAT-noSAT היא Δ_P-שלמה ביחס לרדוקציות העתקה פולינומיאליות.

סעיף ג'

הוכיחו כי $\text{SAT} \in \text{co}\mathcal{NP}$ אם ורק אם $\Delta_P = \mathcal{NP}$.

סעיף ד' (קשה)

נגדיר את השפה maxIS :

$\text{maxIS} = \{ (G,k) : \text{The size of the maximum independent set in the graph } G \text{ is } k \}$

הוכיחו כי maxIS היא Δ_P-שלמה ביחס לרדוקציות העתקה פולינומיאליות.

רמז: הראו רדוקציה פולינומית מ- SAT-noSAT ל- maxIS. השתמשו ברדוקציה מ-3SAT ל- IS היוצרת, בהינתן נוסחה φ, גרף G ומספר k כך שתמיד יש בגרף G קבוצה בלתי תלויה בגודל k-1, ובנוסף אם $\varphi \in 3\text{SAT}$, אזי ב- G הקבוצה הבלתי תלויה הגדולה ביותר היא בגודל k.

שאלה 4

יהיו $G_1=(V_1,E_1)$ ו- $G_2=(V_2,E_2)$ שני גרפים לא מכוונים. פונקציה $f:V_1\to V_2$ נקראת <u>איזומורפיזם</u> מ- G_1 ל- G_2 אם f היא חד-חד ערכית ומקיימת $(u,v)\in E_1$ אם ורק אם $(f(u),f(v))\in E_2$.

הוכיחו כי אם קיים אלגוריתם יעיל הבודק אם שני גרפים הם איזומורפיים אזי קיים אלגוריתם יעיל המוצא איזומורפיזם כזה (אם הוא קיים).

<u>הדרכה</u>:

עבור כל צומת v ב- G_1 יש למצוא לאיזה צומת u ב- G_2 הוא מועתק. ניתן להיעזר באבחנה הבאה:

יהי d מספר טבעי ונניח שקיים צומת יחיד v ב- G_1 בעל דרגה d וקיים צומת יחיד u ב- G_2 בעל דרגה d.

אם קיים איזומורפיזם f מ- G_1 ל- G_2, אזי $f(v)=u$.

שאלה 5

3-צביעה של גרף $G=(V,E)$ היא פונקציה $c: V\to\{1,2,3\}$ המקיימת:

אם $(v_1,v_2)\in E$ אזי $c(v_1)\neq c(v_2)$.

הוכיחו כי אם קיים אלגוריתם יעיל הבודק אם גרף הוא 3-צביע אזי קיים אלגוריתם יעיל המוצא 3-צביעה של הגרף (אם היא קיימת).

שאלה 6

שאלה זו עוסקת בהיררכיה עבור NSPACE.

סעיף א'

הוכיחו ע"י הוכחה פשוטה על סמך משפטים שהוכחו בכיתה כי אם $\lim_{n\to\infty}\frac{(s_1(n))^2}{s_2(n)}=0$ אזי

$\mathcal{NSPACE}(s_1(n))\subset\mathcal{NSPACE}(s_2(n))$.

מה התנאים שיש לדרוש מהפונקציות $s_1(n)$ ו- $s_2(n)$?

סעיף ב'

הוכיחו את משפט ההיררכיה עבור $\mathcal{NSPACE}$ תוך הסתמכות על משפט Immerman-Szelepscenyi.

שאלה7

גרף מכוון $G=(V,E)$ הוא גרף שכבות אם קיימת חלוקה של V ל- k קבוצות זרות $V_1,V_2,...,V_k$ כך שהקשתות עוברות רק משכבה לשכבה שאחריה, כלומר,

$$E\subseteq V_1\times V_2\cup V_2\times V_3\cup\ ...\ \cup V_{k-1}\times V_k.$$

נגדיר:

DAG-CON=$\{\langle G,s,t\rangle : G \text{ is a directed acyclic graph that contains a path from } s \text{ to } t\}$.

הוכיחו כי DAG-CON היא $\mathcal{NL}$ שלמה.

<u>הדרכה</u>: להוכיח כי DAG-CON היא $\mathcal{NL}$ קשה, בהינתן קלט ל- s,t-CON, בנו גרף בו כל צומת היא זוג (v,i) כאשר v הוא צומת בגרף המקורי ו- $1\le i\le n$.

שאלה 8

גרף מכוון הוא קשיר אם לכל זוג צמתים u ו- v בגרף קיים מסלול מכוון מ- u ל- v וקיים מסלול מכוון מ- v ל- u. נגדיר את השפה ALL-CON:

$$\text{ALL-CON} = \{ G : G \text{ is a directed connected graph} \}.$$

הוכיחו כי ALL-CON היא $\mathcal{NL}$ שלמה.

שאלה 9

סעיף א

הוכיחו כי אם שפה L היא $\mathcal{NL}$-שלמה אזי השפה $\overline{L}$ היא $\mathcal{NL}$-שלמה.

סעיף ב

נגדיר את השפה הבאה:

$$\text{unique-s-t-CON} = \{ \langle G,s,t \rangle : t \text{ -ל } s \text{ -מ } \underline{\text{יחיד}} \text{ מסלול } \underline{\text{קיים}} \text{ בו } G \text{ גרף מכוון} \}.$$

הוכיחו כי unique-s-t-CON היא $\mathcal{NL}$-קשה.

שאלה 10

נגדיר את השפה PBA:

$$\text{PBA} = \{ \langle M \rangle, x, 1^n : M \text{ היא מ"ט דטרמיניסטית המקבלת את } x \text{ תוך לכל היותר } n \text{ צעדים} \}.$$

סעיף א'

הוכיחו כי PBA היא $\mathcal{P}$ שלמה תחת רדוקציות זיכרון לוגריתמי.

סעיף ב'

נגדיר $\text{poly}\mathcal{L} = \bigcup_{c \geq 1} \mathcal{DSPACE}(\log^c n)$. הוכיחו כי אם $\text{PBA} \in \text{poly}\mathcal{L}$ אזי קיים $c \geq 1$ כך ש- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{DSPACE}(\log^c n)$.

סעיף ג'

הוכיחו כי $\mathcal{P} \neq \text{poly}\mathcal{L}$.

<u>הדרכה</u>: השתמשו בסעיף ב' ובמשפט ההיררכיה עבור $\mathcal{DSPACE}$ כדי להגיע לסתירה.

שאלה 11

סעיף א'

הוכיחו כי אם $\text{SAT} \in \mathcal{BPP}$ אזי קיים אלגוריתם אקראי פולינומי שמקבל פסוק CNF, ומוצא הצבה מספקת לפסוק (אם קיימת).

סעיף ב'

הוכיחו כי אם $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{BPP}$ אזי $\mathcal{NP} = \mathcal{RP}$.

שאלה 12

נגדיר את המחלקה $\mathcal{PP}$:

$L \in \mathcal{PP}$ אם קיימת מ"ט מטילת מטבעות הרצה בזמן פולינומי ומתקיים:

אם $x \in L$ אזי $\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] > \frac{1}{2}$.

אם $x \notin L$ אזי $\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] \leq \frac{1}{2}$.

כמו כן, נגדיר את השפות הבאות:

MAJ-SAT $= \{\ \varphi$: פסוק CNF עם n משתנים שיש לו יותר מ- 2^{n-1} הצבות מספקות $\}$.

THRESHOLD-SAT $= \{\ \varphi,k$: פסוק CNF שיש לו יותר מ- k הצבות מספקות $\}$.

סעיף א

הוכיחו כי MAJ-SAT $\in \mathcal{PP}$.

סעיף ב

הוכיחו כי השפה THRESHOLD-SAT היא $\mathcal{PP}$-קשה תחת רדוקציות פולינומיות.

הדרכה: בהנתן מ"ט אי-דטרמיניסטית פולינומית M וקלט x, הסתכלו על הפסוק $\varphi_{M,x}$ שבונה הרדוקציה ממשפט Cock-Levin.

שאלה 13

נגדיר את השפה L_{even}:

$L_{\text{even}} = \{$ <M> : $L(M)$ הוא זוגי $\}$ { מספר המילים בשפה.

הערה: אם יש אינסוף מילים ב- $L(M)$ אזי <M> $\notin L_{\text{even}}$.

סעיף א

הוכיחו כי $L_{\text{even}} \notin \mathcal{RE}$.

סעיף ב

הוכיחו $L_{\text{even}} \notin \text{co}\mathcal{RE}$.

שאלה 14

נגדיר את מחלקת השפות $\mathcal{ZPP}$:

$L \in \mathcal{ZPP}$ אם קיימת מ"ט מטילת מטבעות M הרצה בזמן פולינומי בעלת שלושה מצבים סופיים: מצב מקבל, מצב דוחה ומצב "לא ידוע" ומתקיים:

1. אם $x \in L$ אזי $\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] > \frac{1}{2}$ ו- $\Pr[\ M \text{ דוחה את } x\ ] = 0$.
2. אם $x \notin L$ אזי $\Pr[\ M \text{ דוחה את } x\ ] > \frac{1}{2}$ ו- $\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] = 0$.

כלומר M לכל קלט צודקת בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$, לעולם אינה טועה, אך היא יכולה לעצור עם תשובה "לא ידוע".

הוכיחו כי $\mathcal{ZPP} = \mathcal{RP} \cap \text{co}\mathcal{RP}$.

שאלה 15

נתון גרף ובו קליק בגודל |V|¾. תארו אלגוריתם יעיל המוצא בגרף קליק בגודל |V|½ .
<u>הדרכה</u>: השתמשו באלגוריתם המוצא קירוב ביחס 2 לבעיית כיסוי מינימום בצמתים.