המחלקה למדעי המחשב

דר' עמוס ביימל

סיבוכיות – 202-2-1111

סמסטר א' תשס"ב

7.2.2002

הנחיות:

1. בטופס הבחינה שני דפים מלבד דף זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
2. בבחינה 4 שאלות שמשקלן שווה. יש לענות על כולן.
3. הבחינה עם חומר פתוח.
4. נמקו את כל תשובותיכם. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל.
5. משך הבחינה 3 שעות.
6. מומלץ לא להיתקע זמן רב מדי על שום סעיף.
7. הנכם רשאים להסתמך על סעיפים קודמים, גם אם לא השבתם עליהם.

בהצלחה!

שאלה 1 [25 נקודות]

תהי A שפה. נגדיר את השפות $<A$ ו- $>A$ הבאות:

$$<A = \{ x : \forall_y |y| < |x| \Rightarrow y \in A \}$$

$$>A = \{ x : \exists_y |y| > |x| \text{ and } y \in A \}$$

סעיף א [7 נקודות]

הוכיחו כי אם $A \in \mathcal{RE}$, אזי $<A \in \mathcal{RE}$.

סעיף ב [10 נקודות]

הוכיחו כי אם $A \in \mathcal{RE}$, אזי $>A \in \mathcal{RE}$.

סעיף ג [8 נקודות]

נגדיר את השפות הבאות:

$L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle : L(M) = \Sigma^*$ ו- M מ"ט דטרמינסטית $\}$.

$L_{\text{INFINITE}} = \{ <M> :$ $L(M)$ היא אינסופית ו- M מ"ט דטרמינסטית $\}$.

הוכיחו כי $L_{\Sigma^*} \leq L_{\text{INFINITE}}$.

שאלה 2 [25 נקודות]

סעיף א [12 נקודות]

הוכיחו כי אם s-t-CON $\in \mathcal{DL}$ אזי קיימת מ"ט M דטרמיניסטית המשתמשת בזיכרון $\log n$ כך שעל קלט גרף מכוון חסר מעגלים G וצמתים s ו- t המכונה M מחזירה מסלול מכוון מ- s ל- t בגרף (אם קיים).

סעיף ב [13 נקודות]

הוכיחו כי אם s-t-CON $\in \mathcal{RL}$ אזי קיימת מ"ט M <u>מטילת מטבעות</u>, פולינומית המשתמשת בזיכרון $\log n$ כך שעל קלט גרף מכוון חסר מעגלים G וצמתים s ו- t המכונה M מחזירה בהסתברות לפחות ½ מסלול מכוון מ- s ל- t בגרף (אם קיים).

שאלה 3 [25 נקודות]

צביעה של גרף $G=(V,E)$ היא פונקציה $c: V \to \{1,...,n\}$ המקיימת:

אם $(v_1,v_2) \in E$ אזי $c(v_1) \neq c(v_2)$.

נגדיר את השפה COLOR-SUM הבאה:

$\text{COLOR-SUM} = \{ \langle G,k \rangle : \text{קיימת צביעה } c \text{ של } G \text{ כך ש } \sum_{v \in V} c(v) \leq k \}$

- בעיית האופטימיזציה min-COLORING:

בהנתן גרף G, יש למצוא צביעה של G במספר קטן ביותר של צבעים.

- בעיית האופטימיזציה min-COLOR-SUM:

בהנתן גרף G, יש למצוא צביעה c של G כך ש- $\sum_{v \in V} c(v)$ קטן ביותר.

סעיף א [3 נקודות]

הוכיחו כי COLOR-SUM $\in \mathcal{NP}$.

סעיף ב [9 נקודות]

הוכיחו כי COLOR-SUM היא $\mathcal{NP}$-קשה.

רמז: רדוקציה מ- SAT≠.

סעיף ג [4 נקודות]

עבור גרף G נסמן ב- $S(G)$ את הערך המינימום של $\sum_{v \in V} c(v)$ מעל כל הצביעות $c: V \to \{1,...,n\}$.

הוכיחו כי עבור גרף 3-צביע G עם n צמתים מתקיים $n \leq S(G) \leq 3n$.

סעיף ד [9 נקודות]

הוכיחו כי אם אפשר לקרב את הבעיה min-COLORING של גרפים 3-צביעים עם יחס קירוב c, אזי אפשר לקרב את הבעיה min-COLOR-SUM של גרפים 3-צביעים עם יחס קירוב $3c$.

שאלה 4 [25 נקודות]

נגדיר את המחלקה $\mathcal{EXP}$: $\mathcal{EXP} = \bigcup_{c \in N} \mathcal{DTIME}(2^{n^c})$.

כמו כן, נגדיר את השפה B:

$B = \{ \langle M \rangle,x : M \text{ מ"ט דטרמינסטית המקבלת את } x \text{ תוך לכל היותר } 2^{|x|} \text{ צעדים} \}$.

סעיף א [9 נקודות]

הוכיחו כי אם $L \in \mathcal{EXP}$ אזי $L \leq^{\mathrm{p}} B$.

סעיף ב [9 נקודות]

הוכיחו כי אם $L \leq^{\mathrm{p}} B$ אזי $L \in \mathcal{EXP}$.

סעיף ג [7 נקודות]

הוכיחו כי $B \notin \mathcal{P}$.