עמוס ביימל **20/1/02**

סיבוכיות: תרגיל 5

הגשה: יום ב' 4/2/02 ב- 13:00 בתא הדואר שלי (126).

שאלה 1

נגדיר את המחלקה $\mathcal{P}/h(n)$ כאוסף כל השפות המתקבלות ע"י מ"ט פולינומית עם עצה באורך $h(n)$ התלויה רק באורך הקלט n. כלומר, לקלטים באותו אורך מתאימה אותה עצה. פורמלית, $L \in \mathcal{P}/h(n)$ אם קיימת מ"ט פולינומית M וסדרת מחרוזות $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך ש- $|a_n| \le h(n)$ ו- M מקבלת את $x, a_{|x|}$ (הקלט x משורשר עם המחרוזת $a_{|x|}$) אם"ם $x \in L$.

סעיף א'

הוכיחו כי קיימת שפה $L \in \mathcal{P} / 1$ כך ש- $L \notin \mathcal{RE}$.

הדרכה: השתמשו ב- L אונרית.

סעיף ב'

נסמן $\mathcal{P} / \log = \bigcup_{c \ge 1} \mathcal{P} / c \log n$. הוכיחו כי אם $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P} / \log$, אז $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

הדרכה: השתמשו ברדוקציה העצמית של SAT, כלומר בעובדה שאם קיים אלגוריתם יעיל הבודק אם פסוק הוא ב- SAT, אזי קיים אלגוריתם יעיל המוצא הצבה לפסוק ספיק.

שאלה 2

נגדיר את מחלקת השפות $\mathcal{PP}$:

$L \in \mathcal{PP}$ אם קיימת מ"ט מטילת מטבעות M הרצה בזמן פולינומי המקיימת:

1. אם $x \in L$ אזי $\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] > \frac{1}{2}$,
2. אם $x \notin L$ אזי $\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] \le \frac{1}{2}$.

סעיף א'

הוכיחו כי $\mathcal{PP} \subseteq \mathcal{PSPACE}$.

סעיף ב'

תהי M מ"ט מטילת מטבעות. בנו מ"ט מטילת מטבעות M_1 כך שלכל קלט x
$\Pr[\ M_1 \text{ מקבלת את } x\ ] = \frac{1}{2} + \Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ] /2$.

סעיף ג'

הוכיחו כי $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PP}$.

שאלה 3

נגדיר את בעיית האופטימיזציה max-3-IS:
בהינתן גרף לא-מכוון שדרגת כל צומת בו היא לכל היותר 3 יש למצוא קבוצה בלתי תלויה גדולה ביותר בגרף. הראו כי ניתן לקרב בזמן פולינומי את max-3-IS עם יחס קירוב $\frac{1}{3}$.

שאלה 4

סעיף א'

בסעיף זה נראה איך לממש "מונה אקראי" המשתמש בזיכרון $O(\log k)$ ומונה עד 2^k:

1. הטל מטבע k פעמים. אם כל ההטלות היו 0 אזי עצור, אחרת לך ל-1.

הוכיחו:

- האלגוריתם משתמש בזיכרון $O(\log k)$.
- ההסתברות שהאלגוריתם יבצע את צעד 1 פחות מ- 2^{k-1} פעמים היא לכל היותר ½.

הדרכה: השתמשו בעובדה שהסתברות איחוד של מאורעות היא לכל היותר סכום ההסתברויות של המאורעות.

- ההסתברות שהאלגוריתם לא יעצור היא 0.

סעיף ב'

הראה כי קיימת מ"ט מטילת מטבעות M פולינומית המשתמשת בזיכרון $O(\log n)$, כך שעל קלט גרף מכוון G וזוג צמתים s ו- t, מקיימת:

- אם $G,s,t \in$ s-t-CON אזי $P_M(G,s,t) \geq 1/n^n$,
- אם $G,s,t \notin$ s-t-CON אזי $P_M(G,s,t) = 0$.

סעיף ג'

השתמשו בסעיפים א ו- ב כדי להוכיח כי $L \in \mathcal{NL}$ אם ורק אם קיימת מ"ט מטילת מטבעות M המשתמשת בזיכרון $O(\log n)$ המקיימת:

- אם $x \in L$ אזי $P_M(x) \geq$ ½,
- אם $x \notin L$ אזי $P_M(x) = 0$.
- לכל x ההסתברות ש- M לא תעצור על x היא 0.

שאלה 5

בהינתן n קבוצות $S_1,...,S_n$, נאמר כי קבוצה $I \subseteq \{1,...,n\}$ היא אוסף של קבוצות לא-זרות אם לכל $i,j \in I$ מתקיים $S_i \cap S_j \neq \varnothing$. כלומר, כל שתי קבוצות באוסף נחתכות.

נגדיר:

- השפה XS: { ב- $S_1,...,S_n$ קיים אוסף של קבוצות לא-זרות בגודל k : $S_1,...,S_n,k$ }=XS.
- בעיית האופטימיזציה max-XS:

  בהינתן n קבוצות $S_1,...,S_n$, יש למצוא אוסף גדול ביותר של קבוצות לא-זרות.

- בעיית האופטימיזציה max-CLIQUE:

  בהינתן גרף G, יש למצוא קליק גדול ביותר ב- G.

סעיף א

הוכיחו כי XS היא $\mathcal{NP}$-שלמה.

רמז: רדוקציה מ- CLIQUE.

סעיף ב

הוכיחו כי אם אפשר לקרב את הבעיה max- CLIQUE עם יחס קירוב c, אזי אפשר לקרב את הבעיה max-XS עם יחס קירוב c.