אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev
The University celebrates its 30th Anniversary

המחלקה למדעי המחשב

דר' עמוס ביימל

סיבוכיות – מועד א'

סמסטר א' תשס"א
14.2.2001

הנחיות:

1. בטופס הבחינה שני דפים מלבד דף זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
2. בבחינה 4 שאלות שמשקלן שווה. יש לענות על כולן.
3. הבחינה עם חומר פתוח.
4. נמקו את כל תשובותיכם. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל.
5. משך הבחינה 3 שעות.
6. מומלץ לא להיתקע זמן רב מדי על שום סעיף.
7. הנכם רשאים להסתמך על סעיפים קודמים, גם אם לא השבתם עליהם.

בהצלחה!

שאלה 1 [25 נקודות]

תהי A שפה. נגדיר את השפה C_A הבאה: $C_A = \{ \langle M \rangle : A \subseteq L(M) \}$.

סעיף א [13 נקודות]

הוכיחו כי אם A שפה <u>סופית</u>, $A \neq \varnothing$, אזי $C_A \in \mathcal{RE} - \mathcal{R}$.

סעיף ב [12 נקודות]

הוכיחו כי אם A שפה <u>אינסופית</u> אזי $C_A \notin \mathcal{RE}$.

שאלה 2 [25 נקודות]

בהנתן n קבוצות $S_1,...,S_n$, נאמר כי קבוצה $I \subseteq \{1,...,n\}$ היא אוסף של קבוצות לא-זרות אם לכל $i,j \in I$ מתקיים $S_i \cap S_j \neq \varnothing$. כלומר, כל שתי קבוצות באוסף נחתכות.

נגדיר:

- השפה XS:

  $\{ S_1,...,S_n,k : k$ ב- $S_1,...,S_n$ קיים אוסף של קבוצות לא-זרות בגודל $\}$ XS=.

- בעיית האופטימיזציה max-XS:

  בהנתן n קבוצות $S_1,...,S_n$, יש למצוא אוסף גדול ביותר של קבוצות לא-זרות.

- בעיית האופטימיזציה max-CLIQUE:

  בהנתן גרף G, יש למצוא קליק גדול ביותר ב- G.

סעיף א [3 נקודות]

הוכיחו כי $XS \in \mathcal{NP}$.

סעיף א [11 נקודות]

הוכיחו כי XS היא $\mathcal{NP}$-קשה.

רמז: רדוקציה מ- CLIQUE.

סעיף ב [11 נקודות]

הוכיחו כי אם אפשר לקרב את הבעיה max- CLIQUE עם יחס קירוב c, אזי אפשר לקרב את הבעיה max-XS עם יחס קירוב c.

שאלה 3 [25 נקודות]

נתון גרף מכוון G. שני מסלולים ב- G הם שונים אם קיימת קשת המופיעה במסלול אחד ולא מופיעה במסלול השני (המסלולים לא בהכרח פשוטים). נגדיר את השפות הבאות:

$\text{2-s-t-CON} = \{ \langle G,s,t \rangle : t$ -ל s -מ שונים מסלולים שני לפחות קיימים G -ב $\}$.

$\text{unique-s-t-CON} = \{ \langle G,s,t \rangle : t$ -ל s -מ <u>יחיד</u> מסלול <u>קיים</u> G -ב $\}$.

סעיף א [8 נקודות]

הוכיחו כי $\text{2-s-t-CON} \in \mathcal{NL}$.

סעיף ב [9 נקודות]

הוכיחו כי $\text{unique-s-t-CON} \in \mathcal{NL}$.

סעיף ג [8 נקודות]

הוכיחו כי השפה 2-s-t-CON היא $\mathcal{NL}$-קשה.

שאלה 4 [25 נקודות]

נגדיר את המחלקה $\mathcal{PP}$ (כפי שהוגדרה בתרגיל בית 6):

$L \in \mathcal{PP}$ אם קיימת מ"ט מטילת מטבעות הרצה בזמן פולינומי ומתקיים:

1. אם $x \in L$ אזי $\Pr[\, M$ מקבלת את $x \,] > \frac{1}{2}$.
2. אם $x \notin L$ אזי $\Pr[\, M$ מקבלת את $x \,] \leq \frac{1}{2}$.

כמו כן, נגדיר את השפות הבאות:

$\text{MAJ-SAT} = \{ \varphi$: פסוק CNF עם n משתנים שיש לו יותר מ- 2^{n-1} הצבות מספקות $\}$.

$\text{THRESHOLD-SAT} = \{ \langle \varphi,k \rangle$: פסוק CNF עם n משתנים שיש לו יותר מ- k הצבות מספקות $\}$.

סעיף א [10 נקודות]

הוכיחו כי $\text{MAJ-SAT} \in \mathcal{PP}$.

סעיף ב [15 נקודות]

הוכיחו כי השפה THRESHOLD-SAT היא $\mathcal{PP}$-קשה תחת רדוקציות פולינומיות.

<u>הדרכה</u>: בהנתן מ"ט אי-דטרמיניסטית פולינומית M וקלט x, הסתכלו על הפסוק $\varphi_{M,x}$ שבונה הרדוקציה ממשפט Cock-Levin.