אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
המחלקה למדעי המחשב
דר׳ עמוס ביימל

סיבוכיות – מועד ב׳
סמסטר א׳ תש״ס

הנחיות:

1. בטופס הבחינה שני דפים מלבד דף זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
2. בבחינה 4 שאלות שמשקלן שווה. יש לענות על כולן.
3. הבחינה עם חומר פתוח.
4. נמקו את כל תשובותיכם. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל.
5. משך הבחינה 3 שעות.
6. מומלץ לא להתקע זמן רב מדי על שום סעיף.
7. הנכם רשאים להסתמך על סעיפים קודמים, גם אם לא השבתם עליהם.

בהצלחה!

שאלה 1

נגדיר את השפה L_{even} :

$$L_{\text{even}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \langle M\rangle \ :\ \text{הוא זוגי } L(M) \text{ מספר המילים בשפה} \,\}.$$

סעיף 1
הוכיחו כי $L_{\text{even}} \notin \mathcal{RE}$.

סעיף 2
הוכיחו כי $L_{\text{even}} \notin \mathrm{co}\mathcal{RE}$.

הערה: אם יש אינסוף מילים ב- $L(M)$ אזי $\langle M\rangle \notin L_{\text{even}}$.

שאלה 2
יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם n צמתים. קבוצה $D \subseteq V$ היא **קבוצה שולטת** ב-G אם לכל $v \in V \setminus D$ קיים צומת $u \in D$ כך ש-$(u \to v) \in E$.
נגדיר את השפה הבאה:

$$\text{Dom-Set} \;=\; \{\, (G,k) \ :\ \text{יש קבוצה שולטת בגודל } k \text{ ב-} G \,\}.$$

הראו רדוקציה מפורשת מהשפה Dom-Set לשפה Set-Cover.
רמז: לכל צומת בגרף הרדוקציה מייצרת קבוצה.

שאלה 3
הראו כיצד לצבוע גרף 4-צביע ב- $O(n^{2/3})$ צבעים.
רמז: השתמשו באלגוריתם שצובע גרף 3-צביע ב- $O(n^{1/2})$ צבעים.

שאלה 4

גרף שכבות הוא גרף מכוון שצמתיו מחולקים לשכבות וכל קשת עוברת משכבה כלשהי לשכבה העוקבת לה. פורמלית, כל צומת הוא זוג $\langle v, j\rangle$ והקשתות הן קשתות מכוונות מהצורה $(\langle u, j\rangle, \langle v, j+1\rangle)$. נגדיר את השפה UCON :

$(G, \langle s, 0\rangle, \langle t, k\rangle) \in \text{UCON}$ אם"ם G הוא גרף שכבות בו יש מסלול יחיד מהצומת $\langle s, 0\rangle$ לצומת $\langle t, k\rangle$.

הוכיחו כי $\text{UCON} \in \mathcal{DSPACE}(log^2 n)$.

רמז: השתמשו בפרוצדורה רקורסיבית הבודקת אם מספר המסלולים בין שני צמתים הוא אפס, אחד או יותר מאחד.