אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

המחלקה למדעי המחשב
דר׳ עמוסביימל

סיבוכיות – מועד א׳
סמסטר א׳ תש״ס

הנחיות:

1. בטופס הבחינה שני דפים מלבד דף זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
2. בבחינה 4 שאלות שמשקלן אינו שווה. יש לענות על כולן.
3. הבחינה עם חומר פתוח.
4. נמקו את כל תשובותיכם. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל.
5. משך הבחינה 3 שעות.
6. מומלץ לא להתקע זמן רב מדי על שום סעיף.
7. הנכם רשאים להסתמך על סעיפים קודמים, גם אם לא השבתם עליהם.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 **נקודות**)

בשאלה זו G הוא גרף מכוון ואורך מסלול ב-G הוא מספר הקשתות במסלול.
נגדיר את השפות הבאות:

$$\mathrm{DIST} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ (G,s,t,d) \,:\, \text{ב-}G\text{ יש מסלול מ-}s\text{ ל-}t\text{ באורך לכל היותר } d \}.$$

$$\mathrm{minDIST} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ (G,s,t,d) \,:\, \text{אורך מסלול קצר ביותר ב-}G\text{ מ-}s\text{ ל-}t\text{ הוא } d \}.$$

סעיף 1 (10 **נקודות**)
הוכיחו כי $\mathrm{DIST} \in \mathcal{NL}$.

סעיף 2 (10 **נקודות**)
השתמשו בסעיף 1 להוכיח כי $\mathrm{minDIST} \in \mathcal{NL}$.

שאלה 2 (28 **נקודות**)
המחלקה $\forall\mathcal{RE}$ מוגדרת באופן הבא:

שפה $L \in \forall\mathcal{RE}$ אם ורק אם קיימת $L_0 \in \mathcal{RE}$ כך ש- $L = \{ x \,:\, \forall y \; (x,y) \in L_0 \}$.

סעיף 1 (7 **נקודות**)
נגדיר את השפה L_{Σ^*}:

$$L_{\Sigma^*} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ \langle M \rangle \,:\, L(M) = \Sigma^* \}.$$

הוכיחו כי $L_{\Sigma^*} \in \forall\mathcal{RE}$.

סעיף 2 (7 **נקודות**)
הוכיחו כי L_{Σ^*} היא $\forall\mathcal{RE}$ קשה תחת רדוקציות העתקה.

סעיף 3 (7 **נקודות**)
הוכיחו כי $L_{\Sigma^*} \notin \mathcal{RE}$.

סעיף 4 (7 **נקודות**)
הוכיחו כי אם שפה B היא $\forall\mathcal{RE}$ קשה תחת רדוקציות העתקה, אזי $B \notin \mathcal{RE}$.

שאלה 3 (22 **נקודות**)

סעיף 1 (11 **נקודות**)
הוכיחו כי אם $\mathcal{DTIME}(n) \subseteq \mathcal{NL}$ אזי $\mathcal{P} = \mathcal{NL}$.

סעיף 2 (11 **נקודות**)
הוכיחו כי $\mathcal{DTIME}(n) \neq \mathcal{NL}$.

שאלה 4 (30 **נקודות**)

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם n צמתים. קבוצה $D \subseteq V$ היא **קבוצה שולטת** ב-G אם לכל $v \in V \setminus D$ קיים צומת $u \in D$ כך ש-$(u \to v) \in E$.
נגדיר את השפה הבאה:

$$\text{Dom-Set} \;=\; \{\,(G,k)\ :\ \text{ב-}G\text{ יש קבוצה שולטת בגודל } k\,\}.$$

סעיף 1 (3 **נקודות**)
הוכיחו כי $\text{Dom-Set} \in \mathcal{NP}$.

סעיף 2 (12 **נקודות**)
הוכיחו כי Dom-Set היא $\mathcal{NP}$-קשה על ידי רדוקציה מהשפה Set-Cover.

סעיף 3 (3 **נקודות**)
הבעיה MIN-Dom-Set היא למצוא קבוצה שולטת קטנה ביותר.
נתון שב-G אין קבוצה שולטת בגודל $\geq n/2$. הראו אלגוריתם פולינומי המקרב את MIN-Dom-Set עבור G עם יחס קרוב 2.

סעיף 4 (12 **נקודות**)
הראו אלגוריתם פולינומי המקרב את MIN-Dom-Set (עבור כל גרף) עם יחס קרוב $O(\log n)$. הוכיחו נכונות האלגוריתם.