תורת הסיבוכיות – תרגיל 5

<u>הגשה</u>: 4.1.00.

1. גרף מכוון הוא קשיר אם לכל זוג צמתים u ו–v בגרף קיים מסלול מכוון מ–u ל–v וקיים מסלול מכוון מ–v ל–u. נגדיר את השפה $\mathrm{ALL-CON}$:

$$\mathrm{ALL-CON} \stackrel{\text{def}}{=} \{G : G \text{ is a directed connected graph } \}.$$

הוכיחו כי $\mathrm{ALL-CON}$ היא $\mathcal{NL}$ שלמה.

2. נגדיר את השפה PBA:

$$\mathrm{PBA} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle M\rangle, x, 1^n : \text{ צעדים } n \text{ תוך לכל היותר } x \text{ את מקבלת דטרמיניסטית מ''ט } M\}.$$

(א) הוכיחו כי PBB היא $\mathcal{P}$ שלמה תחת רדוקציות זכרון לוגריתמי.

(ב) נגדיר

$$\mathrm{poly}\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{c\geq 1} \mathcal{DSPACE}(\log^c n).$$

הוכיחו כי אם $\mathrm{PBA} \in \mathrm{poly}\mathcal{L}$ אזי קיים $c \geq 1$ כך ש–$\mathcal{P} \in \mathcal{DSPACE}(\log^c n)$.

(ג) הוכיחו כי $\mathcal{P} \neq \mathrm{poly}\mathcal{L}$.

3. תהיינה A, B שפות. נסמן $A \leq^{s(n)} B$ אם קיימת פונקציה f כך ש–

- קיימת מ''ט דטרמיניסטית המשתמשת בזכרון עבודה $s(n)$ ומחשבת את $f(x)$, וגם
- $x \in A$ אם ורק אם $f(x) \in B$.

מטרת שאלה זו להוכיח כי רדוקציות $\leq^{\log^2}$ אינן טרנזיטיביות.

(א) הסבירו בקצרה מדוע הבניה שמוכיחה כי רדוקציות $\leq^{\log}$ הן טרנזיטיביות אינה עובדת עבור רדוקציות $\leq^{\log^2}$.

(ב) תהי $L \in \mathcal{DSPACE}(\log^4(n))$ שפה כלשהי. נגדיר את השפות הבאות:
$L_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x\#^{|x|^{\log|x|}} : x \in L\right\}$, ו–$L_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1\}$ (כאשר $\#$ היא אות שלא בא''ב של L).
הוכיחו כי $L \leq^{\log^2} L_1$.

(ג) הוכיחו כי $L_1 \leq^{\log^2} L_2$.

(ד) הוכיחו כי אם רדוקציות $\leq^{\log^2}$ הן טרנזיטיביות אזי

$$\mathcal{DSPACE}(\log^2(n)) = \mathcal{DSPACE}(\log^4(n)).$$

הסיקו כי רדוקציות $\leq^{\log^2}$ אינן טרנזיטיביות.

4. נגדיר את מחלקת השפות $\mathcal{PP}$:
$L \in \mathcal{PP}$ אם קיימת מ''ט מטילת מטבעות הרצה בזמן פולינומי ומתקיים:

- אם $x \in L$ אז $\Pr[\ M$ מקבלת את $x\ ] > \frac{1}{2}$.
- אם $x \notin L$ אז $\Pr[\ M$ מקבלת את $x\ ] \leq \frac{1}{2}$.

(א) תהי M מ"ט מטילת מטבעות. בנו מ"ט מטילת מטבעות M' כך שלכל קלט x:

$$\Pr[\ M' \text{ מקבלת את } x\ ] = \frac{1}{2} + \frac{\Pr[\ M \text{ מקבלת את } x\ ]}{2}.$$

(ב) הוכיחו כי: $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PP}$.