עמוס ביימל

7.12.99

תורת הסיבוכיות – תרגיל 4

<u>הגשה</u>: 21.12.99.

1. סווגו כל אחת מהשפות הבאית לאחת מהאפשרויות הבאית: (1) השפה ב-$\mathcal{P}$, (2) השפה היא $\mathcal{NP}$ קשה, או (3) השפה אינה ב-$\mathcal{NP}$. הוכיחו תשובותיכם.

(א) $\left\{ G \;:\; G \text{ has a clique of size } 3 \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{3CLIQUE}$.

(ב) $\left\{ G \;:\; G=(V,E) \text{ has a clique of size } \frac{|V|}{2} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{HALF}-\text{CLIQUE}$.

(ג) $\left\{ G \;:\; G \text{ has a coloring with 4 colors} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{4COLORING}$.

(ד) $\left\{ \langle M\rangle, x, 1^k \;:\; \begin{array}{l} M \text{ is a non-deterministic TM} \\ \text{that accepts } x \text{ within at most } \mathbf{2^k} \\ \text{steps in some computation} \end{array} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{EXP}-\text{HALTING}$.

2. יהי ϕ פסוק 3-CNF. הצבה מספקת-לא-מספקת למשתנים של ϕ היא הצבה בה בכל פסוקית יש ליטרל שמסתפק וליטרל שלא מסתפק. כלומר, זוהי הצבה המספקת את ϕ אבל לא מספקת סימולטנית 3 ליטרלים המופיעים באותה פסוקית. נגדיר את השפה $\neq$SAT כאוסף כל פסוקי $3-\text{CNF}$ שיש להם הצבה מספקת-לא-מספקת.

(א) הראו כי המשלים של הצבה מספקת-לא-מספקת הוא הצבה מספקת-לא-מספקת.

(ב) הוכיחו כי $\neq$SAT היא $\mathcal{NP}$ שלמה.
הדרכה: הראו רדוקציה מ-3SAT בה מחליפים כל פסוקית $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$ בשתי פסוקיות

$$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee t_i) \wedge (\overline{t_i} \vee \ell_3 \vee b),$$

כאשר t_i היא משתנה חדש עבור הפסוקית c_i ו-b היא משתנה חדש נוסף יחיד.

3. צביעה של גרף $G=(V,E)$ ע"י k צבעים היא פונקציה $\phi : V \to \{1,\ldots,k\}$ המקיימת:

$$(v_1,v_2) \in E \implies \phi(v_1) \neq \phi(v_2).$$

נגדיר את היחס $3C$: $(G,\phi) \in 3C$ אם G הינו גרף ו-ϕ היא צביעה של G ע"י 3 צבעים. הוכיחו כי היחס $3C$ ניתן לרדוקציה עצמית.

4. נגדיר את מחלקת השפות $\Delta\mathcal{P}$:
$L \in \Delta\mathcal{P}$ אם ורק אם קיימות $L_1 \in \mathcal{NP}$ ו-$L_2 \in \text{co}\mathcal{NP}$ כך ש-$L = L_1 \cap L_2$.
שימו לב כי $\Delta\mathcal{P}$ <u>איננה</u> שווה ל- $\mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$.

(א) הוכיחו כי $\mathcal{NP} \cup \text{co}\mathcal{NP} \subseteq \Delta\mathcal{P}$.

(ב) נגדיר את השפה SAT-noSAT:

$$\text{SAT-noSAT} = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 \in 3SAT, \varphi_2 \notin 3SAT\}.$$

הוכיחו כי $\text{SAT-noSAT} \in \Delta\mathcal{P}$.

(ג) הוכיחו בקצרה כי SAT-noSAT היא $\Delta\mathcal{P}$-שלמה ביחס לר-דוקציות העתקה פולינומיאליות.

(ד) הוכיחו כי אם $\overline{\text{SAT}} \in \mathcal{NP}$ אזי $\Delta\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

(ה) נגדיר את השפה maxIS:

$$\text{maxIS} = \{(\text{G}, \text{k}) \ : \ \text{The size of the maximum independent set in the graph } G \text{ is k}\}.$$

הוכיחו כי $\text{maxIS} \in \Delta\mathcal{P}$.