תורת הקב' התיאורית

אורי אבן-חיים

רקע בטופולוגיה

מרחב טופולוגי מוגדר להיות זוג (X,T) כאשר X קבוצה $T\subseteq \mathcal{P}(X)$ מקיימת 1. $\phi, X\in T$ 2. לכל $S\subseteq T$, $\cup S\in T$, 3. לכל $S\subseteq T$ סופית $\cap S\in T$. (T נקראת טופולוגיה, ואברי T "קבוצות פתוחות").

תת-מרחב של מ"ט נקרא עבור תת-קב' $Y\subseteq X$ וטופולוגיה $T|Y=\{U\cap Y \mid U\in T\}$

בסיס לטופולוגיה (X,T) זה אוסף $B\subseteq T$ כך שכל קב' פתוחה מ-T היא איחוד של אברי B.
$\forall U\in T\ \exists B_0\subseteq B\ (U=\cup B_0)$

אוסף $S\subseteq T$ יקרא **תת-בסיס** אם אוסף החיתוכים הסופיים של אברי S מהווה בסיס.

מ"ט יקרא second countable אם יש לו **בסיס בן-מניה**.

סביבה פתוחה של נק' $x\in X$ היא פשוט קבוצה פתוחה המכילה את x.

סביבה של $x\in X$ היא קבוצה A המכילה סביבה פתוחה של x, כלומר $U\subseteq A$, $x\in U$, U פתוחה.

מרחב מטרי הוא זוג (S,d) כאשר $d:S\times S\to\mathbb{R}$ מקיימת

1. לכל $a,b\in S$ $d(a,b)\geq 0$
2. לכל $a,b\in S$ $d(a,b)=d(b,a)$
3. $d(a,a)=0$ ולכל $a,b\in S$ אם $d(a,b)=0$ אז $a=b$.
4. לכל a,b,c מתקיים אי-שוויון המשולש $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$

דוגמאות למרחבים מטריים

1. הישר הממשי עם פונ' המרחק $d(a,b)=|a-b|$
2. לכל n טבעי נגדיר $(\mathbb{R}^n,d)$ ע"י

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\ ,\qquad x=(x_1,\dots,x_n)\quad y=(y_1,\dots,y_n)$$

<u>תרגיל</u> הוכח את אי-שוויון המשולש עבור מטריקה זו.

<u>הגדרה</u> לכל 2 וקטורים x,y נגדיר

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

<u>הוכח</u> 1. $x\cdot x\ge 0$

2. $x\cdot y=y\cdot x$

3. $x(y_1+y_2)=x\cdot y_1+x\cdot y_2$

חיבור וקטורי

<u>הוכח</u>

4. אי-שוויון קושי-שוורץ

$$|x\cdot y|\le\|x\|\,\|y\|$$

כאשר

$$\|x\|=\sqrt{x\cdot x}$$

<u>מסקנה</u> מאי-שוויון קושי שוורץ לכל $a,b\in\mathbb{R}^n$

$$\|a+b\|\le\|a\|+\|b\|$$

$$\|a+b\|^2=(a+b)\cdot(a+b)=\|a\|^2+\|b\|^2+2\,a\cdot b\le$$
$$\|a\|^2+\|b\|^2+2\|a\|\|b\|=(\|a\|+\|b\|)^2$$

וכיוון שאלו מספרים אי-שליליים $\|a+b\|\le\|a\|+\|b\|$

הסק מכאן את אי-שוויון המשולש.

כל מרחב מטרי הוא מרחב טופולוגי: אם (S,d) מרחב מטרי,
נאמר ש $A \subseteq S$ קב' פתוחה אם לכל $a \in A$ קיים $0 < \varepsilon$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$
כך ש

$$B^{\varepsilon}(a) \subseteq A$$

כאשר

$$B^{\varepsilon}(a) = \{ x \in S \mid d(x,a) < \varepsilon \}$$

<u>תרגיל</u> אוסף הקבוצות הפתוחות של מרחב מטרי מהווה טופולוגיה.

<u>מושג הרציפות</u> נניח (S_1, d_1) (S_2, d_2) מרחבים מטריים.
$f: S_1 \to S_2$ נקראת רציפה בנקודה $x \in S_1$ אם המקור של כל סביבה של $f(x)$ הוא סביבה של x. כלומר (באופן שקול) לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש

$$f[B^{\delta}(x)] \subseteq B^{\varepsilon}(x)$$

<u>כנ"ל</u> f תקרא רציפה אם היא רציפה בכל נקודות S_1.

<u>תרגיל</u> רציפות $f: S_1 \to S_2$ בנקודה $x \in S_1$ שקולה לטענה
אם $\{a_i\} \subseteq S_1$ סדרה המקיימת $\lim_{i\to\infty} a_i = x$ אזי
$\lim_{i\to\infty} f(a_i) = f(x)$.

<u>רציפות במרחבים טופולוגיים</u>

נניח (X_1, T_1) (X_2, T_2) מרחבים טופולוגיים, אזי
$f: X_1 \to X_2$ נקראת <u>רציפה</u> אם לכל קב' פתוחה $A \in T_2$
$f^{-1}A = \{x \in X_1 \mid f(x) \in A\}$ קב' פתוחה (ב T_1)

~~תרגיל יש מרחב טופולוגי~~

<u>הגדרה</u> מרחב טופולוגי (X,T) נקרא <u>מטריזבילי</u>

אזי קיימת מטריקה $d: X\times X \to \mathbb{R}$

כך שאוסף הקבוצות הפתוחות ש d מגדירה הוא בדיוק T.

<u>תרגיל</u> אם (S,d) מרחב מטרי אז כל נקודה היא חיתוך של סדרה (בת מניה) של סביבות שלה. ביתר דיוק לכל $x\in S$ קיימת סדרה V_i $i\in\mathbb{N}$ של סביבות פתוחות של x כך ש
$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i=\{x\}$

<u>תרגיל</u> יש מרחב טופולוגי שאיננו מטריזבילי.

<u>הדרכה</u> נמצא מרחב טופולוגי בו כל נקודה איננה חיתוך בן מניה של סביבות שלה (כמו בתרגיל למעלה).

<u>נגדיר</u>

$$X=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$$

נגדיר <u>בסיס</u> לטופולוגיה: לכל סדרה סופית $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$

וסדרה באותו אורך n של קטעים פתוחים $V_1,\dots,V_n$

נגדיר

$$U^{x_1,\dots x_n}_{V_1,\dots V_2}=\{f\in X \mid \forall i \ f(x_i)\in V_i\}$$

הוכח שקבוצות אלו מהוות בסיס (ב.ס). האוסף $\{U^{\bar{x}}_{\bar{V}}\}$ סגור תחת חיתוכים סופיים. ואחרי נותן את X) לטופולוגיה

ואם נתונה סדרה $\langle U(i) \mid i\in\mathbb{N}\rangle$ של סביבות של נקודה $f\in X$ אזי יש $g\in X$ $g\neq f$ השייכת לכל הסביבות.

<u>הגדרה</u> במרחב ~~מטרי~~ טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ קבוצה $A\subseteq X$ נקראת <u>סגורה</u>
אם משלימתה $X\setminus A$ פתוחה.

אוסף הקב' הסגורות מקיים תכונות דואליות לאוסף הפתוחות;
X,ϕ סגורות,
איחוד מספר סופי של סגורות הוא סגור, וחיתוך כלשהו של קב' סגורות סגור.

<u>תרגיל</u> $f: X_1 \to X_2$ (העתקה של מ"ט X_1 למ"ט X_2) רציפה
אמ"מ המקור של קב' סגורה סגור.

<u>הגדרה</u> במ"ט $(X,\mathcal{U})$ קבוצה $D\subseteq X$ נקראת צפופה
אם $D\cap A\neq\phi$ לכל $A\in\mathcal{U}$ שאינה ריקה.

<u>הגדרה</u> <u>הסגור</u> $\bar{A}$ של קבוצה כלשהי $A\subseteq X$ במ"ט מוגדר

$$\bar{A} = \bigcap \{B \mid A\subseteq B,\ B \text{ סגורה}\}$$

<u>תרגיל</u> 1. $\bar{A}$ קב' סגורה המקיפה את A
2. אם B סגורה ומקיפה את A אז $\bar{A}\subseteq B$
3. $x\in\bar{A}$ אמ"מ כל סביבה של x גם חותכת את A
4. אם F סגורה אז $\bar{F}=F$. לכן $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$.
5. $A_1\subseteq A_2 \Rightarrow \bar{A_1}\subseteq\bar{A_2}$.
6. $A\subseteq X$ צפופה אמ"מ $\bar{A}=X$.

<u>הגדרה</u> מ"ט נקרא ספרבילי (פריד) אם יש לו קב' צפופה בת מניה.

<u>תרגיל</u> מרחב מטרי הוא ספרבילי אמ"מ הוא מקיים את אקס' המניה השניה (יש בסיס בן מניה לטופולוגיה).

<u>שלמות</u> היא תכונה של מרחבים מטריים.

יהי (S,d) מרחב מטרי. סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ של איברי S נקראת סדרת קושי (Cauchy) אם לכל $\varepsilon>0$ יש $n\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m_1,m_2\in\mathbb{N}$, אם $n\le m_1,m_2$ אז $d(x_{m_1},x_{m_2})<\varepsilon$

<u>הגדרה</u> מרחב מטרי נקרא <u>שלם</u> אם כל סדרת קושי בו מתכנסת כלומר יש $s\in S$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = s$. (הגדרת התכנסות סדרה היא כמו באינפי; לכל ε יש n לכל $n\le m$ $d(x_m,s)<\varepsilon$.

<u>קומפקטיות</u>

ד"מ $(X,\mathcal{U})$ כיסוי <u>פתוח</u> הוא אוסף תת-קב' פתוחות שאיחודן הוא X. כלומר $C'\subseteq\mathcal{U}$ הוא כיסוי פתוח אם $\bigcup C'=X$.

באופן דומה, עבור $A\subseteq X$, <u>כיסוי פתוח של A</u> הוא אוסף קב' פתוחות שאיחודן מכיל את A.

<u>הגדרה</u> קב' $A\subseteq X$ נקראת <u>קומפקטית</u> אם כל כיסוי פתוח של A מכיל תת-כיסוי סופי. המרחב עצמו נקרא קומפקטי אם כל כיסוי פתוח של המרחב מכיל תת-כיסוי סופי.

<u>תכונת החיתוך הסופי</u>. <u>הגדרה</u> אומרים שאוסף $\mathcal{A}$ של קבוצות יש תכונת החיתוך הסופי (תח"ס) אם לכל $\mathcal{A}_0\subseteq\mathcal{A}$ סופית $\bigcap\mathcal{A}_0\neq\phi$

תרגיל מרחב טופ' $(X,\mathcal{U})$ קומפקטי אמ"מ לכל אוסף $\mathcal{F}$ של קבוצות סגורות בתח"ס k ש-$\mathcal{F}$ גורר $\bigcap\mathcal{F}\neq\emptyset$. (כלומר מכך שחיתוך כל מספר סופי של קבוצות ב-$\mathcal{F}$ אינו ריק, נובע שחיתוך כל קבוצות $\mathcal{F}$ אינו ריק.)

תרגיל קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית (עפ"י הגדרה של ק' קומפקטית וכן בטופולוגיה המושרית.)

כזכור אם $(X,\mathcal{U})$ מ"ט ואם $A\subseteq X$ אז הטופולוגיה המושרית על A היא האוסף $\mathcal{U}|A=\{V\cap A \mid V\in\mathcal{U}\}$.

תרגיל כל מרחב מטרי קומפקטי (S,d) מקיים את אקס' המניה השניה (יש בסיס בן מניה של ק' פתוחות).

הדרכה לכל $n\in\mathbb{N}$ יש כיסוי סופי ע"י כדורים פתוחים ברדיוס $\frac{1}{n}$ (השתמשו לשם כך בקומפקטיות)

הגדרה מרחב מטרי נקרא *קומפקטי סדרתית* אם כל סדרת נקודות בו מכילה תת-סדרה מתכנסת.

תרגיל מרחב מטרי קומפקטי הוא קומפקטי סדרתית.

הדרכה נניח שלא, ואז יש סדרה $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ שאין לה תת-סדרה מתכנסת. לכל נקודה במרחב $a\in S$ יש n כך ש-$B^{1/n}(a)$ (הכדור הפתוח ברדיוס $1/n$) חותך רק מספר סופי של איברי הסדרה. ואז נקבל כיסוי של S ע"י מספר סופי של כדורים כאלה. **השלם פרטים**.

מסקנה מרחב מטרי קומפקטי הוא שלם.

תרגיל כל ק' סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית.

<u>הגדרה</u> מ"ט נקרא האוסדורף (Hausdorff) אם לכל שתי נקודות $x \neq y$ יש סביבות פתוחות זרות.

<u>תרגיל</u> במרחב האוסדורף כל קב' קומפקטית היא סגורה.

תכונות <u>הפרדה</u> ~~חלקיות מהאוסדורף~~ נוספות הן:

<u>רגולריות</u>: לכל קב' סגורה F ולכל $x \notin F$ יש קב' פתוחה $F \subseteq G$ וקב' פתוחה $H \ni x$ כך ש $G \cap H = \phi$. כלומר, יש אפשרות הפרדה בין קב' סגורה ונק' מחוצה לה ע"י קב' פתוחות זרות.

<u>תרגיל</u> מרחב רגולרי אם"ם לכל $x \in X$, כל סביבה של x מכילה סביבה סגורה.

~~כאשר מרחב האוסדורף המקיים~~

<u>הגדרה</u> מ"ט נקרא <u>נורמלי</u> אם לכל שתי קב' סגורות זרות $F_1 \cap F_2 = \phi$ יש פתוחות זרות G_1, G_2 כך ש $F_1 \subseteq G_1$ $F_2 \subseteq G_2$.

<u>תרגיל</u> כל מרחב <u>מטרי</u> הוא נורמלי.

<u>הערה</u> בדרך כלל נדרש גם האוסדורף רגולרי, והאוסדורף נורמלי.

קבוצות קלילות ומשפט Baire במרחבים מטריים.

יהי (X,d) מרחב מטרי. קבוצה $A \subseteq X$ נקראת <u>קלילה</u> (nowhere dense) אם כל קב' פתוחה לא ריקה מכילה קב' פתוחה לא ריקה זרה ל A. [באופן כללי ניתן להגדיר קב' קלילה במרחב טופולוגי כלשהו.)

<u>משפט</u> מרחב מטרי שלם אינו איחוד בן-מניה של קבוצות קלילות.

<u>הוכחה</u> תהיינה $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ קבוצות קלילות. נגדיר באינ.

סדרה יורדת בהכלה של כדורים פתוחים $B^{r_n}(x_n)$
כך ש- $B^{r_n}(x_n)\cap A_n=\emptyset$. סדרת מרכזי הכדורים היא סדרת קושי
ולכן מתכנסת לנקודה שמחוץ לאיחוד הקבוצות הדלילות.

<u>תרגיל</u> רשום הוכחה מפורטת יותר.

<u>תרגיל</u> 1. אם A קב' דלילה במ"ט X, אז גם $\overline{X}$ דלילה.

2. נאמר שקב' A במ"ט היא מסוג G_δ אם היא חיתוך בן-מניה של קבוצות פתוחות.

3. משלימה של קב' דלילה היא צפופה במרחב.

4. אם קב' סגורה בעלת משלים צפוף אז הקב' דלילה.

5. קב' נקראת מקטגוריה ראשונה (first category) = meager אם היא איחוד בן מניה של קבוצות דלילות.

6. חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות וצפופות במרחב מטרי שלם הוא צפוף.

<u>מכפלה של מרחבים מטריים</u>

<u>הערה</u> אם (X,d) מרחב מטרי אז יש מטריקה שקולה וחסומה:
נגדיר $d'(a,b)=\min\{d(a,b),1\}$. שקולות = אותה טופולוגיה.

נניח $(X_i,d_i),\ i\in\mathbb{N}$ מרחבים מטריים נגדיר
חסומים על ידי 1

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i=\{f \mid f \text{ פונ' על } \mathbb{N},\ f(i)\in X_i \text{ לכל } i\in\mathbb{N}\}$$

עבור $f,g \in \prod_i X_i$ נגדיר

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(f(i),g(i))}{2^{i+1}}$$

הטור 2^{i+1} מבטיח התכנסות כי $d_i(f(i),g(i)) \leq 1$

תרגיל הפונ' d הוא מטריקה.

התכנסות במרחב המכפלה $\equiv$ התכנסות בכל ציר

למה נניח $\prod_i (X_i,d_i)$ מכפלה של מ"מ (מרחבים מטריים)
אזי $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ אמ"מ לכל אינדקס i $\lim_n f_n(i) = f(i)$
במרחב X_i. תרגיל הוכח את הלמה.

דוגמה קוביית הילברט היא המכפלה $\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i = Q$
כאשר $I_i = [0,1]$ קטע היחידה הסגור.

טענה Q מרחב שלם פריק.

תרגיל הוכח את הטענה על ידי כך שתוכיח שמכפלת מרחבים שלמים שלמה, ומכפלת מרחבים פריקים פריקה (פריק $\equiv$ ספרבילי).

הלמה של Urysohn עבור מרחבים מטריים
כללית

למה יהי (X,d) מ"מ. אם A,B
קבוצות סגורות וזרות אז יש
רציפה $f: X \to I = [0,1]$ כך ש $A = f^{-1}\{0\}$, $B = f^{-1}\{1\}$.

הוכחה אם $A = \phi$ או $B = \phi$ (או $A = B = \phi$)

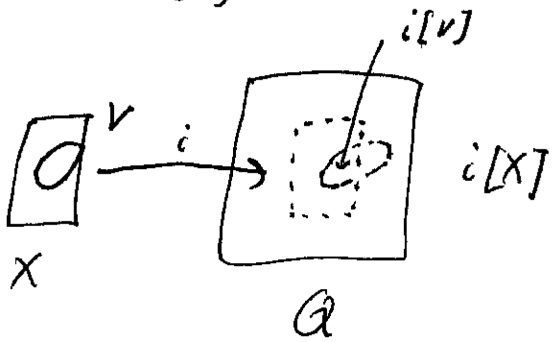
אז מוגדר f כנדרש. אלא אם $A=B=\emptyset$ ואז $f\equiv \frac{1}{2}$ כנדרש.
אם $A\neq\emptyset$ $B\neq\emptyset$ נגדיר

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

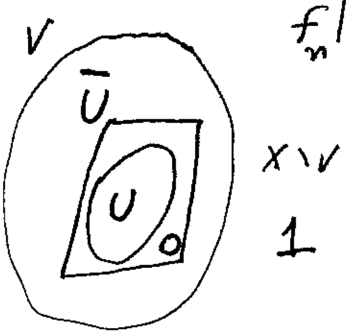
כאשר $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a\in A\}$

תרגיל הוכח ש f רציפה.

משפט כל מרחב מטרי עם בסיס בן מנייה הומיאומורפי לתת-מרחב של $Q=\prod_k I_k$ (מרחב הילברט מכפלות קטע יחידה I_i)
כלומר אם X מטרי בעל בסיס בן מנייה אז יש פונ' $i: X\to Q$ חח"ע המקיימת: לכל קב' $V\subseteq X$, V פתוחה אם"ם $i[V]$ פתוחה בטופ' היחסית של $i[X]$



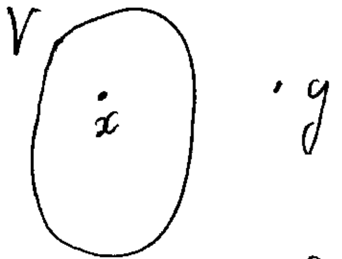
הוכחה יהי $\mathcal{U}$ בסיס בן מנייה של X. נמנה את כל הזוגות $U,V\in\mathcal{U}$ כך ש $\bar{U}\subseteq V$ $\{(U_n,V_n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ ולכל זוג כזה נמצא (עפ"י אוריסון) $f_n: X\to[0,1]$ רציפה כך ש $f_n|\bar{U}_n\equiv 0$ $f_n|X\setminus V\equiv 1$
בעזרת סדרת הפונ' $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$



נגדיר $i: X\to Q=\prod_k I_k$

$i(x)(k) = f_k(x)$ של יבי

1. i חח"ע כי אם $x \neq y$ נמצא הפרדה האוסדורף בין x, y
וכך נמצא $V \in \mathcal{U}$ המקיים $x \in V$ $y \notin V$
(צריך כאן פחות מהאוסדורף)



בעזרת רגולריות נמצא $U \in \mathcal{U}$
המקיימת $x \in U$ $\bar{U} \subseteq V$.

$f_n = f_{U,V}$. $f_n(x) = 0$ $f_n(y) = 1$.

2. i פונ׳ רציפה. נניח $i(x) = y$
$y = (y_0, y_1, \dots) \in \prod_k I_k$, $f_k(x) = y_k$

נניח $x_n \to x$ במרחב X. צריך להוכיח $y_n = i(x_n) \to y$
לשם כך צריך להראות שלכל K ולכל $0<\epsilon$ יש מקום M כך שאם $n \geq M$
אז ~~$y_n(k) = y(k)$~~ . $|y_n(k) - y(k)| < \epsilon$
לכל $i < K$ מרציפות f_i יש סביבה של x שם הפרש ערכי f_i על כל שתי נקודות $<$

i רציפה וכן i^{-1} רציפה. צ"ל אם $x \in X$ $\{x_n\} \subseteq X$
אז $\lim x_n = x$ אז"ק $\lim i(x_n) = i(x)$

צ״ל וכו׳ $\quad i(x)(k)=f_k(x)$

1. i חח״ע

2. i רציפה ו-i^{-1} רציפה. צ״ל שלכל $x\in X$, $\{x_n\}\subseteq X$

אם $x_n\to x$ מתקיים $i(x_n)\to i(x)$

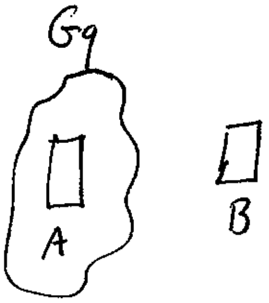
<u>הלמה של Urysohn</u> נכונה באופן כללי יותר.

אם $(X,\mathcal{U})$ מרחב טופ׳ האוסדורף נורמלי, אם $A,B\subsetneq X$ סגורות וזרות אז יש $f:X\to[0,1]$ רציפה כך

ש $f|A\equiv 0$ $\quad f|B\equiv 1$.

<u>סכמת הוכחה</u> לכל מספר רציונלי $q\in[0,1]$ נגדיר קב׳ פתוחה G_q כך שמתקיים:

1. $G_1=X$, ולכל $0\le q<1$ רציונלי
$A\subseteq G_q\subseteq X\setminus B$



2. אם $q_1<q_2$ רציונליים בקטע $[0,1]$
אז $\overline{G_{q_1}}\subseteq G_{q_2}$

לאחר שנמצא כאלה נגדיר

$$f(x)=\inf\{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\mid x\in G_q\}$$

ונוכיח ש f רציפה כנדרש.

<u>משפט</u> ההרחבה של Tietze (עבור מרחבים נורמליים).

נניח X מ"ט נורמלי, $A \subseteq X$ קב' סגורה.

נניח $f : A \to \mathbb{R}$ רציפה (בטופ' היחסית).

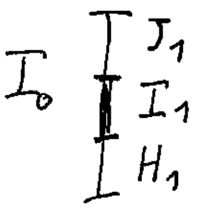
אז יש $F : X \to \mathbb{R}$ רציפה כך ש $f = F \restriction A$.

יתר על כן, אם f חסומה ע"י M (כלומר $|f(a)| \leq M$ לכל $a \in A$) אז ניתן לקבל שגם F חסומה ע"י M (ואפילו מקיימת $|f(x)| < M$ לכל $x \in X \setminus A$ אם X מרחב מטרי).

<u>סקירת ההוכחה</u> הרעיון הוא להגדיר פונקציות $g_n : X \to \mathbb{R}$ באינ. על n כך ש $F = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$ הפונ' המבוקשת.

נניח f חסומה ע"י M. נסמן $I_0 = [-M, M]$. $f : A \to I_0$. נגדיר לשם פשטות סימון $I_n = \left[\frac{-M}{2 \cdot 3^n}, \frac{M}{2 \cdot 3^n}\right]$

כלומר $|I_n| = \frac{1}{3^n}$



~~נסמן~~ נחלק את I_0 לשלושה קטעים סגורים שווים באורכם.

$f^{-1} H_1 = R$, $f^{-1} J_1 = S$ תת-קב' סגורות של A

ולפי הלמה של אוריסון יש פונ' $g_1 : X \to I_1$

המקבלת ערך $\min I_1$ על R,

ערך $\max I_1$ על S.

אזי הפונ' $f - g_1 \restriction A : A \to I_1$

נמשיך ונגדיר באינ. על n

$$g_n : X \to I_n$$

כך

$$f - \sum_{k=1}^{n} g_k \restriction A : A \to I_n$$

נניח g_n הוגדרה. נקבל את g_{n+1} ומתוך

$$h = f - \sum_{k=1}^{n} g_k \restriction A$$

באותו אופן קיבלנו את g_1 מ-f.

<u>משפט עזר</u> מ"ט רגולרי ובעל בסיס בן מניה הוא נורמלי.

<u>הוכחה</u> נניח $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ בסיס לטופ' של מרחב X.

נניח $A, B \subseteq X$ שתי קב' סגורות זרות.

נאמר: קב' פתוחה P "טובה עבור A" אם היא חותכת את A כך ש- $\overline{P} \cap B = \emptyset$. באותו אופן Q טובה ל B אם היא חותכת את B והסגור שלה זר ל A. בעקבות הרגולריות נמצא כיסוי ל A של קבוצות בסיס טובות ל A: $\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ וכך גם כיסוי ל B של קבוצות בסיס טובות ל B: $\{Q_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

אם נגדיר

$$P_i' = P_i \setminus \bigcup_{k \le i} \overline{Q_k}$$

$Q_i' = Q_i \setminus \bigcup_{k \le i} \overline{P_k}$, אז $\bigcup_i P_i'$, $\bigcup_i Q_i'$ הפרדה

כנדרש ל A, B.

<u>משפט</u> המטריזציה של Urysohn

כל מט"ט רגולרי עם בסיס בן מניה מטריזבילי.

<u>הוכחה</u> לפי משפט עזר, המרחב X נורמלי.

יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה, נמנה את כל הזוגות $U,V\in\mathcal{B}$ כך ש $\bar{U}\subseteq V$ זו קבוצה בת מניה A. לכל $(U,V)\in A$ נמצא פונ' רציפה $f=f_{U,V}:X\to[0,1]$ המקבלת 0 על $\bar{U}$ ו 1 על $X\setminus V$! (לפי משפט יריסון שהרי המרחב נורמלי)

תהי $\mathcal{F}$ קב' הפונקציות המתקבלות. $\mathcal{F}$ בת מניה, ולכל נקודה $x\in X$ וקבוצה סגורה E כך ש $x\notin E$ נמצא $U,V\in\mathcal{B}$ כך ש $x\in U, \bar{U}\subseteq V$, $V\cap E=\emptyset$. (כיצד? תחילה נמצא ע"פ רגולריות קב' פתוחה V' שסגור שלה זר ל E ($x\in V'$!). אחר כך נמצא $V\in\mathcal{B}$ כך ש $x\in V\subseteq V'$. שוב נשתמש ברגולריות להפרדת x מ $X\setminus V$ ונמצא $U\in\mathcal{B}$ כך ש $x\in U,\bar{U}\subseteq V$.)

ולכן יש $f\in\mathcal{F}$ אשר "מפרידה" בין x ל E. כלומר מתאפסת על x ומקבלת 1 על E.

נגדיר פונ'

$$F: X\to\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$$

כאשר $\prod_i I_i$ הוא מרחב הילברט של מכפלת

קטעי היחידה I_i. לשם הגדרת F נקח מניה $\mathcal{F}=\{g_k \mid k\in\mathbb{N}\}$

ונגדיר

$$F(x) = \langle g_k(x) \mid k\in\mathbb{N}\rangle$$

נבדוק תכונות F

1. F חח"ע כי אם $x_1\neq x_2$ אז יש g_k המפרידה בין x_1 ל-x_2 (נקודות הן קבוצות סגורות במרחב רגולרי (כלומר אנו משתמשים במונח רגולרי במשמעות שכוללת האוסדורף).

2. F רציפה. הדבר נובע מהעובדה של g_k רציפה, ומהגדרת טופולוגית המכפלה $\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$.

3. F הומאומורפיזם על תמונת F.
צריך להוכיח שתמונה של קב' פתוחה ב-X היא פתוחה בטופ' היחסית ב-F[X]. זה נובע מכך שאוסף הפונקציות $\mathcal{F}$ מפריד נקודות וסגורות: נניח A קב' פתוחה, $x\in A$ אז יש g_k המתאפסת על x ומקבלת 1 מחוץ ל-A.
אזי $H=\{h\in\prod_i I_i \mid h(k)<\frac{1}{2}\}$ קב' פתוחה (סביבה ל-$F(x)$) שזרה ל-$F[A]$.

אך מרחב הילברט מטרי. ולכן ניתן להגדיר מטריקה מתאימה על X.