09 מאי 18

תרגיל על סודרים

הגדרה קבוצה A נקראת סודר אם היא טרנזיטיבית וסדורה היטב על ידי יחס השייכות $\in$. כלומר

1. לכל $a\in A$, $a\subseteq A$.
2. אם נגדיר

$$R=\left\{\langle a,b\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b\in A \\ a\in b \end{array}\right\}$$

אז R יחס סדר טוב על A

תרגיל 1 הוכח בפירוט שכל איבר של סודר גם הוא סודר.

תרגיל 2 אם α,β סודרים ו- $\alpha\subseteq\beta$ אז או ש $\alpha\in\beta$ או ש $\alpha=\beta$.

הדרכה נניח $\alpha\subsetneq\beta$. אז יש $b\in\beta$ כך ש $b\notin\alpha$.
יהי b מינימלי כזה (ביחס $\in$ שהוא סדר טוב על β).
הוכח $\alpha=b$, ואז $\alpha\in\beta$ כנדרש.

תרגיל 3 אם α,β סודרים אז אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות מתקיימת: $\alpha=\beta$, $\alpha\in\beta$, $\beta\in\alpha$.

הדרכה ① תחילה הוכח שמהגדרת "סודר" נובע שלא מתקיימות שתיים משלוש האפשרויות.
② נניח $\alpha\notin\beta$. נגדיר:

$$\mu = \{a\in\alpha \mid a\in\beta\}$$

הוכח μ סודר. $\mu\subseteq\alpha$ וכן $\mu\subseteq\beta$. בעזרת תרגיל 2 הסק את המבוקש.

<u>תרגיל 4</u> תהי R קבוצה לא ריקה של איברים טרנזיטיביים. אזי גם $\cap R = \{x \mid \forall r\in R\,(x\in r)\}$ קב' טרנזיטיבית.

הוכח זאת והסק מכך שאם R קבוצה לא ריקה של סודרים אזי $\cap R$ סודר.

<u>תרגיל 5</u> אם R קבוצה לא ריקה של סודרים אזי $\cap R\in R$ הוא סודר מינימלי ב-R ביחס $\in$.

הדרכה. נסמן $\alpha=\cap R$. הנח $\alpha\notin R$. הסק מכך שלכל $\beta\in R$, $\alpha\in\beta$ (בעזרת תרגיל 2). לכן $\alpha\in\alpha$ (נמק) וזו סתירה.

<u>תרגיל 6</u> אם R קבוצה של סודרים אזי $\cup R = \{x \mid \exists r\in R\,(x\in r)\}$ סודר, נסמן

$$\sup R = \cup R$$

מתקיים: לכל $a\in R$ $a\le\sup R$.

תאריך להגשה: יום ב 26 מאי.