חבורות אבליות ותת-חבורות אבליות

טענה: G אבלית $\Leftrightarrow$ כל ההצגות האי-פריקות של G הן חד-ממדיות.

הוכחה: נסמן ב-$(n_1, n_2, \dots, n_k)$ את סדרת המימדים של ההצגות האי-פריקות השונות של G (תתכנה חזרות אם להצגות שונות יש את אותו המימד). ראינו ש-k הוא בדיוק מספר מחלקות הצמידות של G ושמתקיים $|G| = n_1^2 + \dots + n_k^2$.
מכאן $k = |G|$ (כלומר, G אבלית) אמ"ם $n_i = 1$, $\forall 1 \le i \le k$. $\square$

מסקנה: תהא A תת-חבורה אבלית של G. אז המימד של כל הצגה אי-פריקה של G $\le \frac{|G|}{|A|}$.

הוכחה: תהא $\rho: G \to GL(V)$ הצגה אי-פריקה של G. נצמצם אותה ל-A ונקבל הצגה $\rho_A: A \to GL(V)$ של A. תהא $W \subseteq V$ תת-הצגה של (ρ_A, V) אי-פריקה. מהטענה הקודמת $\dim W = 1$. נסמן ב-V' את תת-המרחב של V הנוצר ע"י התמונות $\rho(g)W$ של W, כש-g עובר על כל איברי G. כיוון ש-V' תת-הצגה ו-V אי-פריקה מתקיים $V = V'$.
עבור $g \in G$, $a \in A$ מתקיים $\rho(ga)W = \rho(g)\rho(a)W = \rho(g)W$ ולכן,
מספר תתי-המרחבים שהם שונים ברשימה $\{\rho(g)W \mid g \in G\}$ הוא לכל היותר $[G:A]$.
ולכן $\dim\left(\sum_g \rho(g)W\right) = \dim V \le |G|/|A|$. $\square$

דוגמאות

(1) נסמן $C_n = \langle a \rangle = \{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ החבורה הציקלית מסדר n. לפי הטענה ההצגות האי-פריקות הן חד-ממדיות (כי C_n אבלית). מחפשים אם כן הומומורפיזמים

$$\theta : C_n \longrightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$$

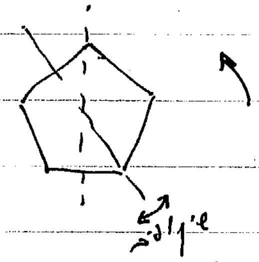
כיוון ש-C_n נוצרת ע"י a, מספיק לדעת את $\theta(a) = \omega$ ואז $\theta(a^i) = \theta(a)^i = \omega^i$.
וכיוון ש-$a^n = 1$, צריך להתקיים $\omega^n = 1$ $\Leftarrow$ $\omega = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$, $(k = 0, 1, \dots, n-1)$.
קיבלנו n הצגות שונות ולכן אלו כולן.

$$\theta_k(a^l) = e^{2\pi i \frac{kl}{n}} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

נשים לב שעבור הצגה חד-מימדית הקרקטר של ההצגה שלה היא $\rho = \chi_\rho$.
לכן, להצגות כאלה הקרקטר הוא פונקציה כפלית (הומומורפיזם).
בהמשך נשתמש בעובדה זו כדי לקבל תוצאות הצגות יותר עבור חבורות אחרות.

(2) <u>החבורה הדיהדרלית</u> (<u>dihedral group</u>).

זו חבורת הסימטריות של מצולע משוכלל עם n צלעות.



היא מכילה n סיבובים ו-n שיקופים.

נסמן ב-a סיבוב בזוית $\frac{2\pi}{n}$, ונסמן ב-b את אחד השיקופים. מתקיים:

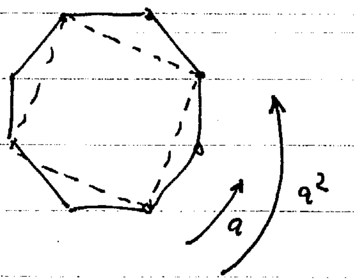
$$D_{2n} = \langle a,b \mid b^2=1,\ a^n=1,\ bab^{-1}=a^{-1} \rangle$$
$$= \{ a^i b^j \mid 0 \leq i \leq n-1,\ b \in \{0,1\} \}$$

מהמסקנה נובע שממדי ההצגות ≤ 2 כי $C_n \lhd D_{2n}$ מאינדקס 2.

<u>$n \geq 4$ זוגי:</u>

(א) הצגות 1-ממדיות

נשים לב שתת-החבורה הנוצרת ע"י a^2: $N:=\langle a^2 \rangle$ היא נורמלית כי הצמדה בכל איבר x מ-D_n משמרת את הזוגיות של החזקות המתאימות של a.



לכן,
$$N \hookrightarrow D_{2n} \twoheadrightarrow C_2 \times C_2$$
$$a \longmapsto \bar{a}$$
$$b \longmapsto \bar{b}$$

בתרגיל ביתי תשבתם את ההצגות של $C_2 \times C_2$ וע"י "משיכה לאחור" את ההצגה של $C_2 \times C_2$ נותנת הצגה של D_{2n} (הצגות אי-פריקות נותנות הצגות אי-פריקות).

(ב) הצגות דו-ממדיות

תהא (θ, W) ההצגה האי-פריקה של C_n המוגדרת ע"י

$$\theta(a) = \theta_m(a) = \omega^m \qquad \left(\omega = e^{2\pi i/n}, \ m \in \{0, \dots, n-1\}\right)$$

$$\theta = \theta_m : C_n \to GL_1(\mathbb{C}) \ , \qquad W \cong \mathbb{C}.$$

נסמן:

$$\rho = \rho_m = \mathrm{Ind}_{C_n}^{D_{2n}}(\theta_m) \qquad \text{(ההצגה המושרית מ- } \theta_m\text{)}$$

מאחר ו- $[D_{2n}:C_n]=2$ נקבל ש- $\dim \rho_m = [D_{2n}:C_n] \dim\theta_m = 2$. נסמן ב- $V=V_m$ את מרחב ההצגה של ρ. מהגדרת ההצגה המושרית נובע:

$$V = W \oplus \rho(b)W = W \oplus W_\sigma \simeq \mathbb{C}^2$$

כאשר $\{1,b\}$ מערכת נציגים של המחלקות D_{2n}/C_n ו- σ מציין את המחלקה bC_n.

יהי v איבר בסיס כלשהו של W, כלומר $W = \mathbb{C}v$.

נסמן $v_\sigma = \rho(b)v$, זהו איבר בסיס של W_σ: $W_\sigma = \mathbb{C}v_\sigma$.

מהי המטריצה המייצגת של $\rho(a)$ ו- $\rho(b)$ ביחס לבסיס (v, v_σ) של V?

- $\rho(a)v = \theta(a)v = \omega^m v$
- $\rho(a)v_\sigma = \rho(a)\rho(b)v = \rho(ab)v$

$$= \rho(ba^{-1})v = \rho(b)\rho(a)^{-1}v$$
$$= \omega^{-m}\rho(b)v = \omega^{-m}v_\sigma$$

ולכן

$$[\rho(a)]_{(v,v_\sigma)} = \begin{pmatrix} \omega^m & 0 \\ 0 & \omega^{-m} \end{pmatrix}$$

ובדומה

- $\rho(b)v = v_\sigma$
- $\rho(b)v_\sigma = \rho(b)\rho(b)v = v$

ולכן

$$[\rho(b)]_{(v,v_\sigma)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן, לאיבר כללי ב- D_{2n}, שהוא מהצורה $a^j b^l$ $(j\in\{0,\dots,n-1\}, l\in\{0,1\})$:

$$[\rho_m(a^j)] = \begin{pmatrix} \omega^{mj} & 0 \\ 0 & \omega^{-mj} \end{pmatrix}$$

$$[\rho_m(a^j b)] = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{+mj} \\ \omega^{-mj} & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן אפשר לחשב את הקרקטר במפורש:

$$\chi_{\rho_m}(a^j) = \omega^{mj} + \omega^{-mj} = 2\cos\left(\frac{2\pi mj}{n}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\chi_{\rho_m}(a^j b) = 0$$

- רואים מיד ש- $\chi_{\rho_m} = \chi_{\rho_{n-m}}$ $\Leftarrow$ $\rho_m \cong \rho_{n-m}$.
- בנוסף, $Res^{D_{2n}}_{C_n}(\rho_m) = \theta_m \oplus \theta_{n-m}$ ולכן $\rho_m \ncong \rho_{m'}$ אם $m \neq m'$ וגם $m \neq n-m'$.

$\Leftarrow$ ההצגות $\rho_0, \dots, \rho_{n/2}$ אינן איזומורפיות אחת לשניה.

אי-פריקות:

$$\langle \chi_{\rho_m}, \chi_{\rho_m} \rangle = \frac{1}{|D_{2n}|} \sum_{g\in D_n} \chi(g)\overline{\chi(g)}$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega^{mj} + \omega^{-mj}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{2mj}}_{= \begin{cases} 0 & m\neq 0, \frac{n}{2} \\ n & m = 0, \frac{n}{2} \end{cases}} + \sum_{j=0}^{n-1} 2 + \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-2mj} \right)$$

בדומה לסכום הראשון

$$= \begin{cases} 1 & m \neq 0, n/2 \\ 2 & m = 0, n/2 \end{cases}$$

כלומר: $\rho_1, \dots, \rho_{n/2-1}$ הן אי-פריקות. $\rho_0, \rho_{n/2}$ פריקות.

לסכם: מצאנו 4 הצגות אי פריקות ממימד 1

$(\frac{n}{2}-1)$ הצגות אי פריקות ממימד 2

אבל...

$$|D_n| = 2n = \sum (\dim V_i)^2 \geq 4\cdot 1^2 + (\tfrac{n}{2}-1)\cdot 2^2 = 2n$$

לכן מצאנו את כל ההצגות האי פריקות של D_n עבור n זוגי ≥ 4.

עבור $n\geq 3$ אי-זוגי: תרגיל.

הצגות של חבורות מסדר < 10.

1	$\{*\}$				
2	C_2				
3	C_3				
4	C_4	$C_2\times C_2$ ✓			
5	C_5				
6	C_6			S_3 ✓	
7	C_7				
8	C_8	$C_4\times C_2$	$C_2\times C_2\times C_2$	D_8 ✓	Q_8
9	C_9	$C_3\times C_3$			
	ציקליות ✓				
	אבליות			לא אבליות	

להשלמת הרשימה

- Q_8 תרגיל.
- בהינתן חבורות G_1 ו-G_2 נראה כיצד לבנות את כל ההצגות האי פריקות של $G_1\times G_2$ מההצגות האי פריקות של G_1 ו-G_2. ולמעשה

$$\mathrm{Irr}(G_1\times G_2) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Irr}(G_1)\times \mathrm{Irr}(G_2)$$

מכפלה ישרה של חבורות והצגותיה

אם G_1 ו- G_2 חבורות נסמן ב- $G_1\times G_2$ את המכפלה הישרה שלהן:

$$G_1\times G_2 = \{(g_1,g_2) \mid g_i\in G_i\}$$

עם כפל לפי קואורדינטות: $(g_1,g_2)\cdot(h_1,h_2)=(g_1h_1,g_2h_2)$.
החבורות G_1 ו- G_2 משוכנות במכפלה $\varphi_i: G_i \hookrightarrow G_1\times G_2$ כאשר $\varphi_1(g_1)=(g_1,1)$ ו- $\varphi_2(g_2)=(1,g_2)$. נשים לב שעבור שיכונים אלו תמונותיהן מתחלפות: $(g_1,g_2)=(g_1,1)\cdot(1,g_2)=(1,g_2)\cdot(g_1,1)$.

אם $\rho_i: G_i\to Aut(V_i)$ הצגות $(i=1,2)$, נבנה בעזרתן הצגה של $G_1\times G_2$.
מרחב ההצגה יהיה $V_1\otimes V_2$ ונסמן אותה $\rho=\rho_1\boxtimes\rho_2$:

$$\rho(g_1,g_2)=(\rho_1\boxtimes\rho_2)(g_1,g_2)=\rho_1(g_1)\otimes\rho_2(g_2)$$

כלומר, על איבר $v_1\otimes v_2\in V_1\otimes V_2$ הפעולה היא $(\rho_1\boxtimes\rho_2)(g_1,g_2)(v_1\otimes v_2)$
$=\rho_1(g_1)v_1\otimes\rho_2(g_2)v_2\in V_1\otimes V_2$

משפט ① אם (ρ_1,G_1,V_1) ו- (ρ_2,G_2,V_2) אי פריקות אז $(\rho_1\boxtimes\rho_2,G_1\times G_2,V_1\otimes V_2)$ אי פריקה.
② כל ההצגות האי פריקות של $G_1\times G_2$ מתקבלות בדרך זו.

הוכחה: ① כיוון ש- ρ_i אי פריקות מתקיים

$$(\chi_{\rho_i},\chi_{\rho_i})=\frac{1}{|G_i|}\sum_{g_i\in G_i}|\chi_{\rho_i}(g)|^2=1$$

נשים לב שהקרקטר המתאים ל- $\rho_1\boxtimes\rho_2$ שווה ל:

$$\chi_{\rho_1\boxtimes\rho_2}(g_1,g_2)=\chi_{\rho_1}(g_1)\cdot\chi_{\rho_2}(g_2)$$

לכן

$$(\chi_{\rho_1\boxtimes\rho_2}, \chi_{\rho_1\boxtimes\rho_2}) = \frac{1}{|G_1||G_2|}\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} |\chi_{\rho_1\boxtimes\rho_2}(g_1,g_2)|^2$$

$$= \frac{1}{|G_1|}\frac{1}{|G_2|}\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}|\chi_{\rho_1}(g_1)|^2|\chi_{\rho_2}(g_2)|^2$$

$$= \left(\frac{1}{|G_1|}\sum_{g_1\in G_1}|\chi_{\rho_1}(g_1)|^2\right)\left(\frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2\in G_2}|\chi_{\rho_2}(g_2)|^2\right)$$

$$= (\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_1})(\chi_{\rho_2},\chi_{\rho_2}) = 1$$

מכאן $\rho_1\boxtimes\rho_2$ אי פריקה.

(2) תהא $f\in\mathbb{C}_{class}(G_1\times G_2)$ נראה שאם f אורתוגונלית לכל הקרקטרים מהצורה $\chi_{\rho_1\boxtimes\rho_2}$ אז $f\equiv 0$.

$$0 = (f,\chi_{\rho_1\boxtimes\rho_2}) = \frac{1}{|G_1||G_2|}\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} f(g_1,g_2)\,\overline{\chi_{\rho_1}(g_1)}\,\overline{\chi_{\rho_2}(g_2)}$$

$$= \frac{1}{|G_1|}\sum_{g_1\in G_1}\underbrace{\left(\frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2\in G_2} f(g_1,g_2)\,\overline{\chi_{\rho_2}(g_2)}\right)}_{\in\,\mathbb{C}_{class}(G_1)}\overline{\chi_{\rho_1}(g_1)}$$

כלומר $\frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2\in G_2} f(g_1,g_2)\overline{\chi_{\rho_2}(g_2)}$ אורתוגונלית לכל הקרקטרים האי פריקים של G_1 ולכן

מתאפס, והטענה נכונה זה שוב עבור $\frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2\in G_2} f(g_1,g_2)\overline{\chi_{\rho_2}(g_2)}$ $\Leftarrow$ $f\equiv 0$. □

הערה: הקשר למכפלה הטנסורית של הצגות של אותה חבורה שלמדנו הוא:

נניח $G=G_1=G_2$, ρ_1 ו- ρ_2 הצגות של G. נסמן $\Delta: G\to G\times G$ השיכון האלכסוני: $\Delta(g)=(g,g)$. ואז: $Res^{G\times G}_{\Delta(G)}(\rho_1\boxtimes\rho_2)\cong\rho_1\otimes\rho_2$.